

Ogólna teoria względności w zadaniach z rozwiązaniami

Autorzy:

Bartłomiej Bąk

Julia Lange

Artur Strąg

Katarzyna Wardega

Opiekun:

prof. dr hab. Jerzy Lewandowski

Opis: W ramach projektu studenci opracują zbiór zadań z rozwiązaniami z zakresu ogólnej teorii względności oparty na wykładach z tego przedmiotu prowadzonych naszym wydziale.

Spis treści

1	Geometria różniczkowa	11
2	Równania Einsteina	39
3	Modele kosmologiczne	43
4	Czarne dziury	49
5	Fale grawitacyjne	63
6	Konforemne uzwarcenie czasoprzestrzeni algebraicznie specjalnej	71

Konwencje

- Zapis różniczkowania dowolnej wielkości A po zmiennej x^i :

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} = \partial_i A = A_{,i}.$$

- Podnoszenie/obniżanie wskaźników za pomocą metryki g :

$$A^i = g^{ij} A_j, \quad B_i = g_{ij} B^j,$$

gdzie g^{ij} oznacza współczynniki metryki odwrotnej.

- Metryki mają strukturę zszytyzowanych iloczynów tensorowych, toteż upraszcza się tę notację w następujący sposób:

$$dx \otimes dy + dy \otimes dx = 2dx dy, \quad dx \otimes dx = dx^2.$$

- Sygnatura metryki Minkowskiego jest postaci $(- + +)$, jeśli będzie inaczej zostanie to jasno zaznaczone.
- Działanie jednoformy ω na pole wektorowe X (i *vice versa*) może być zapisywane na wiele sposobów, z czego w tym zbiorze używane są następujące formy:

$$\omega(X) = X(\omega) = X \lrcorner \omega = \iota_X \omega = X^i \omega_i.$$

Wzory użyteczne

Równanie Killinga:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0, \quad (1)$$

Metryczność koneksji:

$$\nabla g = 0, \quad (2)$$

Beztorsyjność koneksji (dla korepera $\{\omega^\nu\}$):

$$\nabla \omega^\nu = 0, \quad (3)$$

Współczynniki beztorsyjnej, metrycznej koneksji wyrażone za pomocą pochodnych metryki:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\nu\sigma,\mu}), \quad (4)$$

Dwuforma krzywizny:

$$R^\nu{}_\mu = d\Gamma^\nu{}_\mu + \Gamma^\nu{}_\lambda \wedge \Gamma^\lambda{}_\mu, \quad (5)$$

Tensor Riemanna:

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} \Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}, \quad (6)$$

Niezmiennik (skalar) Kretschmanna

$$K = R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} R^\lambda{}_{\mu\nu}{}^\kappa, \quad (7)$$

Tensor Ricciego:

$$R_{\mu\nu} = R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}, \quad (8)$$

Skalar Ricciego

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad (9)$$

Tensor Einsteina:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}, \quad (10)$$

Równanie Einsteina:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (11)$$

Równanie geodezyjnej:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (12)$$

Warunek na geodezyjność wektora v :

$$\nabla_v v = \kappa v \Leftrightarrow v^\mu \nabla_\mu v^\nu = \kappa v^\nu, \quad (13)$$

Krzywizna zewnętrzna:

$$K = K_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 2\mathcal{L}_n g|_S, \quad (14)$$

Metryki

Metryka euklidesowa

$$g_E = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (15)$$

Metryka Minkowskiego

$$g_M = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (16)$$

Metryka Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera

$$g_{FLRW} = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (17)$$

Metryka Schwarzschilda

$$g_{Schw} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (18)$$

Metryka Kottlera (Schwarzschilda - de Sittera)

$$g_{Kott} = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (19)$$

Metryka Minkowskiego z małym zaburzeniem

$$g_{pp} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (20)$$

Metryka algebraicznie specjalna

$$\begin{aligned} \chi &= du + L d\xi + \bar{L} d\bar{\xi}, \\ g_{AS} &= \chi(H\chi + 2dr + W d\xi + \bar{W} d\bar{\xi}) - 2 \frac{r^2 + \Sigma^2}{P^2} d\xi d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (21)$$

Metryka Robinsona-Trautmana

$$g_{RT} = H du^2 + 2dudr - 2 \frac{r^2}{P^2} d\xi d\bar{\xi}, \quad (22)$$

Metryka Bondiego-Sachsa

$$g_{BS} = du(g_{00} du + g_{01} dr + g_{0A} dx^A) + g_{AB} dx^A dx^B, \quad (23)$$

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Zadania

Zadanie 1.1. Niech transformacja między dwiema bazami ($\{e_i\}$ i $\{e'_i\}$) tej samej przestrzeni wektorowej V (skończenie wymiarowej) dana jest w następujący sposób:

$$e'_i = e_j A^j_i,$$

gdzie $A^j_i \in \text{End}(V)$. Obliczyć B^i_j zadające transformację między współrzędnymi wektora X rozpisanego w obu bazach takie, że:

$$X^{ni} = B^i_j X^j.$$

Dodatkowo pokazać, jak transformują się wektory dualne zapisane w bazach $\{e^i\}$ i $\{e'^i\}$ rozpinających przestrzeń V^*

Zadanie 1.2. Dany jest tensor $K = K_{ij} e^i \otimes e^j$, gdzie e^i, e^j są elementami bazy przestrzeni V^* (skończenie wymiarowej). Jego współrzędne transformują się za pomocą $S^i_j \in \text{End}(V)$ (rozszerzenie **Rozwiązania 1.1.**) w następujący sposób

$$K_{ij} S^i_k S^j_l = K_{kl}.$$

Wyznaczyć postać S^{-1} .

Zadanie 1.3. W \mathbb{R}^{n+1} dany jest tensor

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n.$$

Obliczyć pochodną Liego $\mathcal{L}_X g$ względem dowolnego pola wektorowego $X = X^i \partial_i$. Wykazać, że zachodzi

$$\mathcal{L}_X g = (X_{i,j} + X_{j,i}) dx^i \otimes dx^j.$$

Zadanie 1.4. Obliczyć pochodną Liego tensora g z **Zadania 1.3.** względem pola wektorowego $X_{[ij]}$ zdefiniowanego przez dowolne ustalone liczby $i = 0, 1, \dots, n$ oraz $j = 0, 1, \dots, n$,

$$X_{[ij]} := \frac{1}{2} (x_i \partial_j - x_j \partial_i) .$$

Zadanie 1.5. Obliczyć komutator $[X_{[ij]}, X_{[kl]}]$ dla pól wektorowych zdefiniowanych w **Zadaniu 1.4.**

Zadanie 1.6. Wykazać, że pola wektorowe $X_{[ij]}$ z **Zadania 1.4.** są styczne do powierzchni $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zdefiniowanej w następujący sposób:

$$S = \{(x^i) \in \mathbb{R}^{n+1} : g_{ij} x^i x^j = \text{const}\} ,$$

przy czym g_{ij} to współczynniki tensora metrycznego g z **Zadania 1.3.**

Zadanie 1.7. Obliczyć kombinacje liniowe ze stałymi współczynnikami pól wektorowych $X_{[ij]}$ z **Zadania 1.4.**, które są styczne do powierzchni $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$, takiej że:

$$N = \{(x^i) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^0 - x^n = 0\} .$$

Zadanie 1.8. Dana jest forma różniczkowa

$$\omega = \omega_i dx^i ,$$

gdzie $(x^i) \in \mathbb{R}^n$. Udowodnić, że dla dowolnych pól wektorowych X oraz Y , różniczka zewnętrzna jednoformy ω spełnia następującą tożsamość:

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) .$$

Zadanie 1.9. W każdym punkcie $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dana jest baza $\{e_i\} \in T_{\bar{x}} \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz baza dualna $\{e^i\} \in T_{\bar{x}}^* \mathbb{R}^n$. Dane są też funkcje $f_{ij}{}^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, takie, że

$$[e_i, e_j] = f_{ij}{}^k e_k .$$

Obliczyć funkcje $g^i{}_{jk}$ takie, że

$$de^i = g^i{}_{jk} e^j \wedge e^k .$$

Zadanie 1.10. Dla pól wektorowych i jednoform z **Zadania 1.9.** obliczyć

$$\mathcal{L}_{e_i} e^j.$$

Wskazówka:

$$\mathcal{L}_X \omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega).$$

Zadanie 1.11. Generatorem translacji odwrotnej przestrzeni \mathbb{R}^3 nazywamy pole wektorowe

$$T := (2(t_b x^b) x^a - (x_b x^b) t^a) \partial_a,$$

gdzie $t^a \partial_a$ to pole wektorowe (generator zwykłej translacji), którego wszystkie współczynniki są stałe:

$$t^a = \text{const},$$

a wszystkie indeksy są obniżane euklidesowym, trójwymiarowym tensorem metrycznym g_E (**Wzory użyteczne 15**). Obliczyć pochodną Liego metryki wzdłuż T i wykazać, że

$$\mathcal{L}_T g_E = 4(x_a t^a) g_E.$$

Zadanie 1.12. Rozważmy odwzorowanie inwersji

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \ni \bar{x} \longmapsto \frac{\bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\bar{x} \cdot \bar{x}$ oznacza standardowy iloczyn skalarny na \mathbb{R}^3 z metryką g_E (**Wzory użyteczne 15**). Obliczyć pchnięcie $\psi_* t$ stałego pola wektorowego t z **Zadania 1.11.** Porównać wynik z polem wektorowym T z **Zadania 1.11.**

Zadanie 1.13. Rozważmy 5-cio wymiarową przestrzeń Minkowskiego, która jest izomorficzna z \mathbb{R}^5 z układem współrzędnych (x^i) ale jej metryka η zdefiniowana jest następująco:

$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz + dw \otimes dw,$$

gdzie

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = w.$$

Rozważmy powierzchnię $M_{\text{dS}} \subset \mathbb{R}^5$ taką, że:

$$M_{\text{dS}} = \{(x^i) \in \mathbb{R}^5 : \eta_{ij} x^i x^j = R^2 = \text{const}\} .$$

Jest to tzw. zanurzenie przestrzeni de Sittera. Obliczyć tensor g_{dS} indukowany na M_{dS} przez tensor η . Znaleźć w M_{dS} pole wektorowe ξ , które dla indukowanej metryki spełnia równanie Killinga (**Wzory użyteczne 1**). Ile takich pól łatwo jest skonstruować?

Zadanie 1.14. Dla każdej funkcji

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

definiujemy dwuformę różniczkową

$$\omega_f := \frac{f_{,1} dx^2 \wedge dx^3 + f_{,2} dx^3 \wedge dx^1 + f_{,3} dx^1 \wedge dx^2}{\sqrt{(f_{,1})^2 + (f_{,2})^2 + (f_{,3})^2}}$$

wszędzie, gdzie $df \neq 0$. Funkcja f zadaje powierzchnię $S_f \subset \mathbb{R}^3$:

$$S_f = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : f(x^1, x^2, x^3) = 0\} .$$

W dalszej części zadania rozważ następujące 3 przykłady funkcji f :

1. $f(x^1, x^2, x^3) = x^1$,
2. $f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} - 1$,
3. $f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - 1$.

Dla dowolnej funkcji $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sprowadź całkę

$$\int_{S_f} h \omega_f$$

do zwykłej całki po odpowiednim obszarze w \mathbb{R}^2 . Dla jakiej orientacji powierzchni S_f powyższa całka jest dodatnia dla każdej dodatniej funkcji h ?

Zadanie 1.15. Dana jest dwuforma

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

na \mathbb{R}^3 . Wyraż całkę

$$\int_C d\omega$$

po wnętrzu sześcianu C

$$C := [0, 1]^3$$

poprzez całki z ω po ścianach sześcianu C :

$$[0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}, [0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}, \dots$$

Zadanie 1.16. W \mathbb{R}^4 z metryką

$$g = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

zadana jest powierzchnia S w następujący sposób:

$$S = \{(x^i) \in \mathbb{R}^4 : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Znaleźć metrykę indukowaną na tej powierzchni we współrzędnych stereograficznych (ξ_i) :

$$\xi_i = \frac{x_i}{1 - x_0}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Zadanie 1.17. Obliczyć różniczkę zewnętrzną odwracalnej macierzy A (potraktować macierz jako zmienną).

Zadanie 1.18. Udowodnić następujące własności beztorsyjnej (**Wzory użyteczne 3**) i metrycznej (**Wzory użyteczne 2**) koneksji oraz stowarzyszonej z nią pochodnej kowariantnej:

1. w bazie holonomicznej (tzn. $\{e^i\} \equiv \{dx^i\}$) współrzędne koneksji spełniają

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

oraz jej współczynniki wyrażają się za pomocą pochodnych współczynników metryki (**Wzory użyteczne 4**),

2. dla reperu $\{e^i\}$, którego elementy posiadają następującą własność:

$$de^i = \frac{1}{2} f^i_{jk} e^j \wedge e^k$$

oraz metryka jest następującej postaci:

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad g_{ij} = g_{ji} = \text{const},$$

forma koneksji spełnia

$$\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji},$$

oraz jej współczynniki dają się jednoznacznie wyrazić za pomocą funkcji f^i_{jk} ,

3. dla dowolnej funkcji $f \in C^k(\mathbb{R}^4)$, gdzie $k \geq 2$ zachodzi

$$\nabla_i \nabla_j f = \nabla_j \nabla_i f,$$

4. dla jednoformy $\omega = \omega_i e^i$, gdzie $\forall i: \omega_i \in C^k(\mathbb{R}^4)$, przy czym $k \geq 1$, zachodzi:

$$\nabla \omega = d\omega,$$

5. dla dowolnych dwóch pól wektorowych $X = X^i e_i$ oraz $Y = Y^i e_i$ takich, że $\forall i: X^i, Y^i \in C^k(\mathbb{R}^4)$, gdzie $k \geq 1$ zachodzi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathcal{L}_X Y.$$

Zadanie 1.19. Na n -wymiarowej rozmaitości M dany jest tensor metryczny:

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j,$$

oraz odpowiadająca mu beztorsyjna (**Wzory użyteczne 3**) i metryczna (**Wzory użyteczne 2**) koneksja. Załóżmy, że funkcja f spełnia:

$$g^{ij} (\nabla_{e_i} f) (\nabla_{e_j} f) = \text{const}.$$

Wykazać, że pole wektorowe:

$$X^i := g^{ik} \nabla_{e_k} f,$$

jest geodezyjne (**Wzory użyteczne 13**).

Zadanie 1.20. Dwuforma krzywizny R^i_j dana jest wzorem:

$$R^i_j = d\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j,$$

gdzie Γ^i_j oznacza jednoformę koneksji, która transformuje się w następujący sposób:

$$\tilde{\Gamma}^i_j = (A^{-1})^i_a \Gamma^a_b A^b_j + (A^{-1})^i_k dA^k_j,$$

przy czym A jest macierzą zmiany bazy. Pokazać, że R^i_j jest tensorem (tzn. transformuje się jak tensor).

Zadanie 1.21. Udowodnić, że dla metrycznej, beztorsyjnej koneksji dwuforma krzywizny jest antysymetryczna, tzn. $R_{ij} = -R_{ji}$, gdzie pierwszy wskaźnik został opuszczony za pomocą metryki g .

Zadanie 1.22. Wyznaczyć formę beztorsyjnej (**Wzory użyteczne 3**) i metrycznej (**Wzory użyteczne 2**) koneksji Γ^i_j oraz dwuformę krzywizny R^i_j (**Wzory użyteczne 5**) dla sferycznie symetrycznej metryki poniższej postaci:

$$g = -e^{2\phi(t,r)} dt^2 + e^{2\psi(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Zadanie 1.23. Znaleźć skalar krzywizny Ricciego metryki

$$g = \frac{d\xi d\bar{\xi}}{\left(1 + \frac{k}{4}\xi\bar{\xi}\right)^2}.$$

Zadanie 1.24. Wyrazić tensor Ricciego odpowiadający metryce

$$g = dt^2 + g_{ij}(t)dx^i dx^j$$

przez współczynniki tejże metryki i krzywiznę zewnętrzną K :

$$K^i_j = \frac{1}{2}g^{ik}g_{kj}, \quad H = K^i_i,$$

gdzie

$$g_{kj} := \frac{d}{dt}g_{kj}.$$

Zadanie 1.25. Jednowymiarowa rodzina obserwatorów tworzy dwuwymiarową powierzchnię S w czterowymiarowej czasoprzestrzeni w taki sposób, że przez każdy punkt powierzchni przechodzi linia świata dokładnie jednego z obserwatorów. Linie świata obserwatorów są geodezyjne względem geometrii czasoprzestrzeni. Obserwatorzy zsynchronizowali zegarki. Geometrycznie sprowadziło się to do następujących czynności:

- poprowadzenia przestrzennej krzywej γ zawartej w powierzchni S , która przecina linię świata każdego z obserwatorów dokładnie raz i w każdym swoim punkcie jest prostopadła do przecinanej w nim linii świata,
- ustawienia każdego z zegarków tak, aby w chwili przecięcia krzywej γ wszystkie zegarki wskazywały ten sam czas t_0 .

Udowodnić, że zegarki pozostaną zsynchronizowane.

Wskazówka: Udowodnić, że jeśli w czasoprzestrzeni dane są dwa pola wektorowe u oraz X spełniające następujące warunki:

$$\begin{cases} u^i u_i &= -1, \\ \nabla_u u &= 0, \\ [u, X] &= 0, \end{cases}$$

to iloczyn skalarny $u_i X^i$ pozostaje stały wzdłuż linii całkowych pola u . Zauważyć, że pola nie muszą być zdefiniowane w całej czasoprzestrzeni, a jedynie na powierzchni spełniającej odpowiednie własności. Wykożystać tożsamość

$$[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y.$$

Rozwiązania

Rozwiązanie 1.1. Z definicji wektora i zadanych transformacji:

$$X = X'^k e'_k = B^k_i X^i e_j A^j_k = X^k e_k.$$

Zatem

$$\begin{aligned} A^j_k B^k_i &= \delta^j_i, \\ B^k_i &= (A^{-1})^k_i. \end{aligned}$$

Wektory dualne (zwane kowektorami) można zinterpretować, jako funkcjonały liniowe przeprowadzające obiekty z V do ciała \mathbb{K} (nad którym owa przestrzeń wektorowa jest rozpięta). Baza $\{e^i\}$ w V^* jest dualna do bazy $\{e_i\}$ w V gdy zachodzi:

$$e^i(e_j) = e^i e_j = \delta^i_j,$$

gdzie δ^i_j oznacza deltę Kroneckera. Ów wynik nie zależy od wyboru bazy i bazy dualnej, co implikuje:

$$\begin{aligned} 1 &= e'^i e'_i = e'^i e_k A^k_i = e^k e_k, \\ A^k_i e'^i &= e^k, \\ e'^i &= (A^{-1})^i_k e^k = B^i_k e^k. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.2. Wprowadźmy następujące oznaczenie na współczynniki tensora odwrotny K^{-1} :

$$(K^{-1})^{ij} \equiv K^{ij}.$$

Przechodzimy do właściwej transformacji:

$$\begin{aligned} K_{ij} S^i_k S^j_l &= K_{kl}, \\ K_{ij} S^i_k S^j_l (S^{-1})^l_a &= K_{kl} (S^{-1})^l_a, \\ K^{bk} K_{ia} S^i_k &= K^{bk} K_{kl} (S^{-1})^l_a, \\ (K^T)_{ia} S^i_k ((K^{-1})^T)^{kb} &= (S^{-1})^b_a, \end{aligned}$$

gdzie T oznacza transpozycję.

Rozwiązanie 1.3. Dana jest metryka g :

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

oraz pole wektorowe $X = X^a \partial_a$. Obliczamy pochodną Liego powyższej metryki g względem pola wektorowego X :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X (g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = g_{ij} (d(\mathcal{L}_X x^i) \otimes dx^j + dx^i \otimes d(\mathcal{L}_X x^j)) = \\ &= g_{ij} (d(X^i) \otimes dx^j + dx^i \otimes d(X^j)) = g_{ij} (\partial_k X^i dx^k \otimes dx^j + \partial_k X^j dx^i \otimes dx^k) = \\ &= X_{j,k} dx^k \otimes dx^j + X_{i,k} dx^i \otimes dx^k = (X_{j,i} + X_{i,j}) dx^i \otimes dx^j. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.4. Dane jest pole wektorowe

$$X_{[ij]} = \frac{1}{2} (x_i \partial_j - x_j \partial_i),$$

gdzie $[ij]$ oznacza antysymetryzację w tych dwóch wskaźnikach oraz metryka g jak w **Zadaniu 1.3.**. Obliczamy pochodną Liego metryki g względem $X_{[ij]}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_{[ij]}} g &= g_{kl} (d(\mathcal{L}_{X_{[ij]}} x^k) \otimes dx^l + dx^k \otimes d(\mathcal{L}_{X_{[ij]}} x^l)) = \\ &= \frac{1}{2} [g_{kl} (d(x_i \delta_j^k - x_j \delta_i^k) \otimes dx^l + dx^k \otimes d(x_i \delta_j^l - x_j \delta_i^l))] = \\ &= \frac{1}{2} [\underline{dx_i \otimes dx_j} - dx_j \otimes dx_i + dx_j \otimes dx_i - \underline{dx_i \otimes dx_j}] = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.5. Obliczamy komutator pól wektorowych $X_{[ij]}$ z **Zadania 1.4.**:

$$\begin{aligned} [X_{[ij]}, X_{[kl]}] &= \frac{1}{4} [x_i \partial_j - x_j \partial_i, x_k \partial_l - x_l \partial_k] = \\ &= \frac{1}{4} ([x_i \partial_j, x_k \partial_l] - [x_i \partial_j, x_l \partial_k] - [x_j \partial_i, x_k \partial_l] + [x_j \partial_i, x_l \partial_k]) = \\ &= \frac{1}{4} (x_i \delta_{jk} \partial_l - x_k \delta_{li} \partial_j - x_i \delta_{jl} \partial_k + x_l \delta_{ki} \partial_j + \\ &- x_j \delta_{ik} \partial_l + x_k \delta_{lj} \partial_i + x_j \delta_{il} \partial_k - x_l \delta_{kj} \partial_i) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} X_{[lj]} + \delta_{jk} X_{[il]} + \delta_{il} X_{[jk]} + \delta_{jl} X_{[ki]}). \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.6. Wyznaczenie stycznego pola wektorowego do S sprowadza się do obliczenia różniczki funkcji f zadającej tę powierzchnię:

$$df = g_{ij} (x^i dx^j + x^j dx^i) = 2g_{ij} x^i dx^j.$$

Pole X jest polem wektorowym stycznym do S , gdy zachodzi

$$\iota_X df = X \lrcorner df = 0.$$

Bezpośrednim rachunkiem wykazujemy, że pole typu $X_{[ij]}$ (**Zadanie 1.4.**) spełnia ten warunek:

$$\iota_{X_{[ij]}}(2x_a dx^a) = \frac{1}{2} \iota_{x_i \partial_j - x_j \partial_i}(2x_a dx^a) = (x_i x_a \delta_j^a - x_j x_a \delta_i^a) = 0.$$

Rozwiązanie 1.7. Wyrażmy równanie zadające powierzchnię N poprzez współrzędne z obniżonymi wskaźnikami. Korzystając z metryki g (**Zadanie 1.3.**) otrzymujemy:

$$0 = x^0 - x^n = g^{0i} x_i - g^{nj} x_j = -x_0 - x_n,$$

skąd otrzymujemy równoważny warunek

$$x_0 + x_n = 0.$$

Dowolna kombinacja liniowa ze stałymi współczynnikami pól $X_{[ij]}$ z **Zadania 1.4.** stycznych do powierzchni $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest również polem do niej stycznym. Poszukajmy pól powyższego typu spełniających warunek styczności do powierzchni N :

$$\begin{aligned} \iota_{X_{[ij]}}(dx^0 - dx^n) &= 0, \\ \frac{1}{2} (x_i(\delta_j^0 - \delta_j^n) - x_j(\delta_i^0 - \delta_i^n)) &= 0. \end{aligned}$$

Nietrywialne rozwiązanie (dla $i \neq j$) powyższego warunku jest możliwe w następującej sytuacji

$$\delta_j^0 - \delta_j^n = 0 \quad \wedge \quad \delta_i^0 - \delta_i^n = 0.$$

Stąd otrzymujemy $i, j \neq \{0, n\}$, co oznacza, że dowolna kombinacja liniowa pól wektorowych $X_{[i,j]}$ dla których zachodzi $i, j \neq \{0, n\}$ jest styczna do zadanej powierzchni.

Rozwiązanie 1.8. Zadana jest jednoforma $\omega = \omega_i dx^i$ której różniczka zewnętrzna wynosi:

$$d\omega = \omega_{i,j} dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2} \omega_{i,j} (dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j).$$

Obliczmy dla dowolnych pól X i Y zwięźlenie dwuformy $d\omega$ z tymi polami, tzn.

$$\begin{aligned} 2d\omega(X, Y) &= \omega_{i,j} [(X \lrcorner dx^j) \cdot (Y \lrcorner dx^i) - (X \lrcorner dx^i) \cdot (Y \lrcorner dx^j)] = \\ &= \omega_{i,j} (X^j Y^i - X^i Y^j) = X^j (\partial_j \omega_i) Y^i - Y^j (\partial_j \omega_i) X^i = \\ &= X^j \partial_j (\omega_i Y^i) - X^j (\partial_j Y^i) \omega_i - Y^j \partial_j (\omega_i X^i) + Y^j (\partial_j X^i) \omega_i = \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.9. Korzystając z **Rozwiązania 1.8.**, dokonujemy następujących podstawień:

$$\omega \rightarrow e^i, \quad X \rightarrow e_a, \quad Y \rightarrow e_b,$$

zatem:

$$\begin{aligned} de^i(e_a, e_b) &= g^i_{kl} e^k \wedge e^l(e_a, e_b) = \frac{1}{2} g^i_{kl} (e^k(e_a) e^l(e_b) - e^l(e_a) e^k(e_b)) = \\ &= \frac{1}{2} g^i_{kl} (\delta^k_a \delta^l_b - \delta^l_b \delta^k_a) = g^i_{ab}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony dostajemy:

$$\begin{aligned} 2de^i(e_a, e_b) &= e_a(e^i(e_b)) - e_b(e^i(e_a)) - e^i([e_a, e_b]) = \overset{0}{e_i(\delta^i_a)} - \overset{0}{e_j(\delta^i_b)} - e^i(f_{ab}{}^k e_k) = \\ &= -f_{ab}{}^k \delta^i_k = -f_{ab}{}^i. \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$g^i_{ab} = -\frac{1}{2} f_{ab}{}^i.$$

Rozwiązanie 1.10. Korzystając z własności reperu i koreperu z **Zadania 1.9.** oraz wskazówki przechodzimy do bezpośredniego rachunku:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_i} e^j &= e_i \lrcorner (de^j) + d(e_i \lrcorner e^j) = e_i \lrcorner (g^j_{kl} e^k \wedge e^l) + \overset{0}{d(\delta^j_i)} = \\ &= g^j_{kl} e_i \lrcorner (e^k \wedge e^l) = \frac{1}{2} g^j_{kl} (\delta^k_i e^l - \delta^l_i e^k) = \\ &= \frac{1}{2} g^j_{il} e^l - \frac{1}{2} g^j_{ki} e^k = g^j_{ik} e^k = -\frac{1}{2} f_{ik}{}^j e^k. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.11. Generator translacji odwrotnej dany jest wzorem:

$$T = (2(t_b x^b) x^a - (x_b x^b) t^a) \partial_a,$$

gdzie $\forall a \in \{1, 2, 3\} : t^a = \text{const}$. Rozmaitość jest trójwymiarowa i euklidesowa, więc korzystamy z metryki g_E (**Wzory użyteczne 15**). Przystępujemy do liczenia pochodnej Liego tej metryki względem pola T :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T g_E &= \mathcal{L}_T (g_{ij} dx^i dx^j) = 2g_{ij} d(\mathcal{L}_T x^i) dx^j = 2g_{ij} d[2(t_b x^b) x^i - (x_b x^b) t^i] dx^j = \\ &= g_{ij} (2x^i t_b dx^b + 2(t_b x^b) dx^i - 2t^i x_b dx^b) dx^j = 4(t_b x^b) g_{ij} dx^i dx^j = 4(t_b x^b) g_E. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.12. Odwzorowanie inwersji dane jest w następujący sposób:

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \ni \bar{x} \longmapsto \frac{\bar{x}}{\bar{x} \cdot \bar{x}} \in \mathbb{R}^3,$$

co można zapisać równoważnie, jako funkcja zmiany układu współrzędnych:

$$\Psi^i(x^a) = \frac{x^i}{x_j x^j} = \tilde{x}^i.$$

Zobaczmy jak będą wyrażać przetransformowane wersory:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \Psi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \left(\frac{\delta_i^j}{x_a x^a} - \frac{2x^j x_i}{(x_a x^a)^2} \right) \tilde{\partial}_j.$$

Należy zapisać powyższe wyrażenie w układzie (\tilde{x}^i) . Na początku policzmy poniższą wielkość:

$$\tilde{x}_i \tilde{x}^i = \frac{x_i}{x_a x^a} \cdot \frac{x^i}{x_a x^a} = \frac{1}{x_a x^a}.$$

Wobec tego transformacja wersorów przybiera następującą postać:

$$\partial_i = \left((\tilde{x}_a \tilde{x}^a) \delta_i^j - 2\tilde{x}^j \tilde{x}_i \right) \tilde{\partial}_j.$$

Skoro pole t jest stałe, to $t^a = \tilde{t}^a$, dzięki czemu:

$$\Psi_* t = \left[(\tilde{x}_a \tilde{x}^a) \tilde{t}^j - 2(\tilde{t}^a \tilde{x}_a) \tilde{x}^j \right] \tilde{\partial}_j = -\tilde{T}^j \tilde{\partial}_j = -T.$$

Rozwiązanie 1.13. Hiperpowierzchnia $M_{dS} \subset \mathbb{R}^5$ zadana jest równaniem:

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = R^2, \quad R = \text{const}.$$

Tensor $\eta_{\mu\nu}$ jest diagonalną macierzą $\text{diag}(-1, +1, +1, +1, +1)$. Wprowadźmy współrzędne sferyczne:

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \\ x^3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Dzięki temu metryka indukowana na hiperpowierzchni M_{dS} sprowadza się do postaci:

$$g_{dS} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (dx^4)^2.$$

Natomiast równanie hiperpowierzchni upraszcza się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} -(x^0)^2 + r^2 + (x^4)^2 &= R^2, \\ (x^4)^2 - (x^0)^2 &= R^2 - r^2. \end{aligned}$$

Wprowadźmy dodatkową parametryzację:

$$\begin{cases} x^4 = \sqrt{R^2 - r^2} \cosh \tilde{\tau}, \\ x^0 = \sqrt{R^2 - r^2} \sinh \tilde{\tau}. \end{cases}$$

Policzmy różniczkę zewnętrzną zmiennych w powyższej parametryzacji:

$$\begin{cases} dx^4 = -\frac{r \cosh \tilde{\tau}}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr + \sqrt{R^2 - r^2} \sinh \tilde{\tau} d\tilde{\tau}, \\ dx^0 = -\frac{r \sinh \tilde{\tau}}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr + \sqrt{R^2 - r^2} \cosh \tilde{\tau} d\tilde{\tau}. \end{cases}$$

Dzięki temu pozostałe człony metryki transformują się następująco:

$$\begin{aligned} (dx^4)^2 - (dx^0)^2 &= \frac{r^2 \cosh^2 \tilde{\tau}}{R^2 - r^2} dr^2 - r \sinh \tilde{\tau} \cosh \tilde{\tau} dr d\tilde{\tau} + (R^2 - r^2) \sinh^2 \tilde{\tau} d\tilde{\tau}^2 + \\ &- \frac{r^2 \sinh^2 \tilde{\tau}}{R^2 - r^2} dr^2 + r \sinh \tilde{\tau} \cosh \tilde{\tau} dr d\tilde{\tau} - (R^2 - r^2) \cosh^2 \tilde{\tau} d\tilde{\tau}^2 = \\ &= \frac{r^2}{R^2 - r^2} dr^2 - (R^2 - r^2) d\tilde{\tau}^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie metryka indukowana jest postaci:

$$\begin{aligned} g_{dS} &= \frac{r^2}{R^2 - r^2} dr^2 - (R^2 - r^2) d\tilde{\tau}^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \\ &= -\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right) (Rd\tilde{\tau})^2 + \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned}$$

W celu uproszczenia powyżej metryki wprowadzamy nową zmienną $\tau = R\tilde{\tau}$. Dzięki temu całkowita parametryzacja hiperpowierzchni dana jest w następujący sposób:

$$\begin{cases} x^0 = \sqrt{R^2 - r^2} \sinh\left(\frac{\tau}{R}\right), \\ x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \\ x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \\ x^3 = r \cos \theta \\ x^4 = \sqrt{R^2 - r^2} \cosh\left(\frac{\tau}{R}\right), \end{cases}$$

zaś metryka indukowana dana jest wzorem:

$$g_{dS} = -\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right) d\tau^2 + \left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Kolejnym aspektem jest znalezienie pól wektorowych ξ spełniających równanie:

$$\mathcal{L}_\xi g_{dS} = 0.$$

Widać, że g_{dS} nie zależy od ϕ i τ , więc wektorami trywialnie spełniającymi powyższą zależność są:

$$\xi_1 = \partial_\tau, \quad \xi_2 = \partial_\phi.$$

Rozwiązanie 1.14. Niech $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją dodatnią.

- a) Dla funkcji $f(x^1, x^2, x^3) = x^1$ obliczamy $\omega_f = dx^2 \wedge dx^3$ oraz powierzchnię $S_f = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^1 = 0\}$ która jest płaską powierzchnią dwuwymiarową rozpinaną przez osie x^2 oraz x^3 . Wybierzmy wektory normalne $n^\pm = \pm \partial_1$, dodatni w "prawo" oraz ujemny w "lewo", które zadają orientacje $\mathcal{O}^+ = (\partial_2, \partial_3)$ oraz $\mathcal{O}^- = (\partial_3, \partial_2)$ na S_f . Wówczas

$$\int_{(S_f, \mathcal{O}^\pm)} h \omega_f = \int_{\mathbb{R}} dx^2 \int_{\mathbb{R}} dx^3 h(0, x^2, x^3) \mathcal{O}^\pm \lrcorner (dx^2 \wedge dx^3) = \pm \int_{\mathbb{R}} dx^2 \int_{\mathbb{R}} dx^3 h(0, x^2, x^3),$$

zatem z racji dodatniości funkcji h , powyższa całka jest dodatnia dla orientacji z wektorem normalnym "w prawo" oraz ujemna dla wektora normalnego skierowanego "w lewo".

- b) W przypadku funkcji $f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} - 1$ postępujemy podobnie jak w poprzednim podpunkcie. Wyliczamy

$$\omega_f = \frac{x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^2 \wedge dx^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}}$$

oraz zauważamy że powierzchnią S_f jest sferą o środku w początku układu współrzędnych oraz promieniu 1. Przechodzimy zatem do naturalnego dla tego przypadku układu współrzędnych sferycznych:

$$\begin{cases} x^1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ x^2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ x^3(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{gdzie } r \in \mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Rozpisując zadaną dwuformę ω_f w nowych współrzędnych otrzymujemy wynik $\omega_f = r^2 \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$. Natomiast rozpatrywaną powierzchnię w nowych współrzędnych można zapisać jako $S_f = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times]0, \pi] \times [0, 2\pi[\mid r = 1\}$.

Wyberzmy wektory normalne do powierzchni $n^\pm = \pm\partial_r$, dodatni skierowany na zewnątrz oraz ujemny do wewnątrz sfery S_f , indukujące orientacje $\mathcal{O}^+ = (\partial_\theta, \partial_\varphi)$ oraz $\mathcal{O}^- = (\partial_\varphi, \partial_\theta)$ na tejże powierzchni. Możemy zapisać wtedy

$$\begin{aligned} \int_{(S_f, \mathcal{O}^\pm)} h\omega_f &= \int_{(S_f, \mathcal{O}^\pm)} h(r, \theta, \varphi)r^2 \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi h(1, \theta, \varphi) \mathcal{O}^\pm \lrcorner (d\theta \wedge d\varphi) \\ &= \pm \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi h(1, \theta, \varphi). \end{aligned}$$

W tym przypadku, skoro $\sin \theta$ jest dodatnią funkcją wewnątrz rozpatrywanego przedziału, to funkcja podcałkowa jest dodatnia, zatem wynik całkowania jest dodatni z orientacją na zewnątrz sfery i ujemny z orientacją do wewnątrz.

- c) W ostatnim przypadku mamy $f(x^1, x^2, x^3) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} - 1$, skąd otrzymujemy

$$\omega_f = \frac{x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}.$$

Widać, że powierzchnia zadana przez funkcję f jest powierzchnią boczną nieskończenie długiego walca o promieniu podstawy równej 1, warto zatem przejść do odpowiadających tej powierzchni współrzędnych cylindrycznych, dokonując parametryzacji:

$$\begin{cases} x^1(\rho, \varphi, z) = \rho \cos \varphi \\ x^2(\rho, \varphi, z) = \rho \sin \varphi \\ x^3(\rho, \varphi, z) = z \end{cases} \quad \text{gdzie } \rho \in \mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[, \varphi \in [0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}.$$

Wówczas dwuforma ω_f w nowych współrzędnych wyraża się jako $\omega_f = \rho \, d\varphi \wedge dz$, natomiast powierzchnia $S_f = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid \rho = 1\}$. Wyberzmy wektory normalne do powierzchni $n^\pm = \pm\partial_\rho$, dodatni skierowany na zewnątrz oraz ujemny do wewnątrz, indukujące orientacje $\mathcal{O}^+ = (\partial_\varphi, \partial_z)$ oraz $\mathcal{O}^- = (\partial_z, \partial_\varphi)$ na

S_f . Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{(S_f, \mathcal{O}^\pm)} h \omega_f &= \int_{(S_f, \mathcal{O}^\pm)} h(\rho, \varphi, z) \rho d\varphi \wedge dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\mathbb{R}} dz h(1, \varphi, z) \mathcal{O}^\pm \lrcorner (d\varphi \wedge dz) \\ &= \pm \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\mathbb{R}} dz h(1, \varphi, z). \end{aligned}$$

Z racji dodatniości funkcji h , wynik jest dodatni dla orientacji indukowanej przez wektor normalny skierowany na zewnątrz powierzchni, a ujemny w przeciwnym przypadku.

Rozwiązanie 1.15. W pierwszej kolejności skorzystajmy z twierdzenia Stokesa

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega,$$

gdzie

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3).$$

Dokonajmy oznaczeń dla każdej powierzchni stanowiącej element ∂C będący brze-
giem kostki $C = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} D_1^+ &= \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1], & D_2^+ &= [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1], & D_3^+ &= [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}, \\ D_1^- &:= \{1\} \times [0, 1] \times [0, 1], & D_2^- &:= [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1], & D_3^- &:= [0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}. \end{aligned}$$

Dla każdego D_k^\pm wybieramy wektor normalny $n_k^\pm = \pm \partial_k$ do wewnątrz obszaru C , indukujący orientację \mathcal{O}_k^\pm , tzn:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^+ &= (\partial_2, \partial_3), & \mathcal{O}_2^+ &= (\partial_3, \partial_1), & \mathcal{O}_3^+ &= (\partial_1, \partial_2), \\ \mathcal{O}_1^- &= (\partial_3, \partial_2), & \mathcal{O}_2^- &= (\partial_1, \partial_3), & \mathcal{O}_3^- &= (\partial_2, \partial_1). \end{aligned}$$

Wówczas:

$$\int_{\partial C} \omega = \sum_{k=1}^3 \int_{(D_k^+, \mathcal{O}_k^+)} \omega + \sum_{k=1}^3 \int_{(D_k^-, \mathcal{O}_k^-)} \omega. \quad (1.1)$$

Korzystając z formuły

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^n \alpha \wedge (X \lrcorner \beta),$$

gdzie α jest n -formą różniczkową, a X jest polem wektorowym, obliczmy zwięźlenie $(\partial_k, \partial_l) \lrcorner \omega$, mianowicie:

$$\begin{aligned} (\partial_k, \partial_l) \lrcorner \omega &= \partial_k \lrcorner (\partial_l \lrcorner \omega) = \frac{1}{2} \partial_k \lrcorner (\omega_{ij} \delta_l^i dx^j - \omega_{ij} \delta_l^j dx^i) = \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{ij} \delta_l^i \delta_k^j - \omega_{ij} \delta_k^i \delta_l^j) = \frac{1}{2} (\omega_{lk} - \omega_{kl}) = \omega_{[lk]} = \omega_{lk}. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu, np. dla $k = 1$ w równaniu (1.1) można zapisać:

$$\begin{aligned} \int_{(D_1^+, \mathcal{O}_1^+)} \omega + \int_{(D_1^-, \mathcal{O}_1^-)} \omega &= \int_0^1 dx^2 \int_0^1 dx^3 \omega_{23}(0, x^2, x^3) + \int_0^1 dx^3 \int_0^1 dx^2 \omega_{32}(1, x^2, x^3) = \\ &= \int_0^1 dx^2 \int_0^1 dx^3 (\omega_{23}(0, x^2, x^3) - \omega_{23}(1, x^2, x^3)), \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystano z antysymetryczności ω_{ij} . Ostatecznie możemy zapisać

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \omega &= \int_0^1 dx^2 \int_0^1 dx^3 (\omega_{23}(0, x^2, x^3) - \omega_{23}(1, x^2, x^3)) + \\ &+ \int_0^1 dx^1 \int_0^1 dx^3 (\omega_{31}(x^1, 0, x^3) - \omega_{31}(x^1, 1, x^3)) + \\ &+ \int_0^1 dx^1 \int_0^1 dx^2 (\omega_{12}(x^1, x^2, 0) - \omega_{12}(x^1, x^2, 1)). \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.16. Ze zmiennych stereograficznych wynika, że

$$x_i = (1 - x_0) \xi_i,$$

co po wstawieniu do równania powierzchni prowadzi do następującego wyrażenia na x_0 :

$$\begin{aligned} 1 - x_0^2 &= (1 - x_0)^2 (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2), \\ x_0 &= \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - 1}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1} = 1 - \frac{2}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1}. \end{aligned}$$

Teraz należy policzyć różniczki każdego x_i :

$$\begin{aligned} dx_0 &= \frac{4(\xi_1 d\xi_1 - \xi_2 d\xi_2 - \xi_3 d\xi_3)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1)^2}, \\ dx_i &= \frac{2d\xi_i}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1} - \xi_i dx_0, \\ dx_i^2 &= \frac{4d\xi_i^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1)^2} - \frac{4\xi_i d\xi_i dx_0}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1} + \xi_i^2 dx_0^2, \end{aligned}$$

a następnie podstawić do wyrażenia na metrykę g , zatem:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4(d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1)^2} - \frac{4(\xi_1 d\xi_1 - \xi_2 d\xi_2 - \xi_3 d\xi_3) dx_0}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1} + (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1) dx_0^2 = \\ &= \frac{4(d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1)^2} - (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1) dx_0^2 + (\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1) dx_0^2, \\ g &= \frac{4(d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.17. Z definicji macierzy odwracalnej wynika:

$$\mathbb{I} = A A^{-1},$$

gdzie \mathbb{I} oznacza macierz jednostkową. Różniczkując powyższe równanie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d\mathbb{I} = 0 &= (dA) A^{-1} + A d(A^{-1}), \\ d(A^{-1}) &= -A^{-1} (dA) A^{-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.18. W każdym z podpunktów będziemy odwoływać się do dwóch warunków: na metryczność (**Wzory użyteczne 2**) i beztorsyjność (**Wzory użyteczne 3**) dlatego odnośniki do tychże warunków umieszczamy na początku, by w dalszej części rozwiązania za każdym razem ich nie przytaczać.

1. Z warunku na beztorsyjność koneksji otrzymujemy:

$$\nabla dx^i = d(dx^i) + \Gamma^i_j \wedge dx^j = 0.$$

Dodatkowo Γ^i_j jest jednoformą, toteż:

$$\Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j = 0.$$

Iloczyn zewnętrzny z definicji jest całkowicie antysymetryczny, toteż aby uzyskać zero, koneksja musi być całkowicie symetryczna w dwóch dolnych wskaźnikach, co pokazuje poniższy rachunek:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j &= \frac{1}{2} (\Gamma^i_{jk} dx^k \otimes dx^j - \Gamma^i_{jk} dx^j \otimes dx^k) = \frac{1}{2} (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) dx^k \otimes dx^j = 0, \\ \Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j &= 0 \iff \forall i, j, k : \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.\end{aligned}$$

Taka koneksja nie musi być metryczna! Pomimo to, dołożymy warunek na metryczność koneksji i obliczymy wartości współczynników koneksji za pomocą pochodnych metryki g , zatem:

2. Rozpisując warunek na metryczność koneksji otrzymujemy:

$$\nabla g = \nabla(g_{ij} e^i \otimes e^j) = (\nabla g_{ij}) e^i \otimes e^j + g_{ij} \nabla(e^i \otimes e^j),$$

gdzie ostatnia część znika na mocy warunku beztorsyjności. Kontynuując:

$$\begin{aligned}\nabla g &= 0 \iff \nabla g_{ij} = 0 \\ \nabla g_{ij} &= dg_{ij} - g_{ik} \Gamma^k_j - g_{kj} \Gamma^k_i = -\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}^k = 0 \iff \Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}^k,\end{aligned}$$

Z warunku na beztorsyjność i zadanego rozkładu różniczki elementów reperu dostajemy:

$$de^i + \Gamma^i_j e^j \wedge e^j = \frac{1}{2} f^i_{jk} e^j \wedge e^k + \Gamma^i_{jk} e^k \wedge e^j = \left(\frac{1}{2} f^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \right) e^j \wedge e^k = 0$$

Aby znaleźć zależność między f^i_{jk} i Γ^i_{jk} musimy uwzględnić antysymetryzację względem jk występującą w powyższym wzorze, bo koneksja w ogólności nie musi być antystymetryczna względem tych indeksów (w przeciwieństwie do f^i_{jk} , które jest antysymetryczne z definicji). Następnie obniżamy górny wskaźnik mnożąc przez metrykę g_{li} i dostajemy równanie:

$$f_{ljk} = \Gamma_{ljk} - \Gamma_{lkj} = \Gamma_{l[jk]}.$$

Teraz zapiszemy to samo równanie na trzy sposoby korzystając z trzech kolejnych permutacji dolnych indeksów: ljk , jkl , klj . Otrzymamy w ten sposób równania:

$$\begin{cases} f_{ljk} &= \Gamma_{ljk} - \Gamma_{lkj} \\ f_{jkl} &= \Gamma_{jkl} - \Gamma_{jlk} \\ f_{klj} &= \Gamma_{klj} - \Gamma_{kjl} \end{cases}$$

Dodając dwa pierwsze równania, odejmując trzecie i korzystając z odpowiednich antysymetryczności dla Γ i f otrzymujemy:

$$f_{ljk} + f_{jkl} - f_{klj} = 2\Gamma_{ljk},$$

$$\Gamma_{lj} = \Gamma_{ljk} e^k = \frac{1}{2} (f_{ljk} + f_{jkl} - f_{klj}) e^k.$$

3. Z definicji pochodnej kowariantnej oraz równoważności pochodnej kowariantnej i kierunkowej dla funkcji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j f &= \nabla_i e_j(f) = e_i(e_j(f)) - \Gamma_{ij}^k e_k(f), \\ \nabla_j \nabla_i f &= e_j(e_i(f)) - \Gamma_{ji}^k e_k(f), \\ \nabla_i \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i f &= \Gamma_{ij}^k e_k(f) - \Gamma_{ji}^k e_k(f) = 0 \iff \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \end{aligned}$$

co oznacza, że powyższy warunek jest równoważny poprzedniemu.

4. Z beztorsyjności koneksji i definicji pochodnej kowariantnej jednoformy obliczamy wyrażenie z tezy:

$$\nabla \omega = (\nabla_i \omega_j) e^i \wedge e^j = (e_i(\omega_j) - \Gamma_{ij}^k \omega_k) e^i \wedge e^j = e_i(\omega_j) e^i \wedge e^j = d\omega.$$

Z antysymetryczności iloczynu zewnętrznego i powyższego rachunku wynika także

$$\nabla_i \omega_j - \nabla_j \omega_i = e_i(\omega_j) - e_j(\omega_i).$$

5. Z definicji pochodnej kowariantnej pola wektorowego dla beztorsyjnej koneksji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X^i e_i(Y^j) e_j + \Gamma_{ik}^j X^i Y^k e_j, \\ \nabla_Y X &= Y^i e_i(X^j) e_j + \Gamma_{ik}^j Y^i X^k e_j, \\ \nabla_X Y - \nabla_Y X &= X^i e_i(Y^j) e_j - Y^i e_i(X^j) e_j = [X, Y] = \mathcal{L}_X Y, \end{aligned}$$

co wprost wynika z definicji pochodnej Liego pola wektorowego.

Rozwiązanie 1.19. Z warunku na geodezyność (**Wzory użyteczne 13**) dostajemy:

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= X^i (\nabla_{e_i} X^j) e_j + \cancel{X^i X^j (\nabla_{e_i} e_j)} \overset{0}{=} X^i \nabla_{e_i} (g^{jk} \nabla_{e_k} f) e_j = \\ &= \cancel{X^i (\nabla_{e_i} g^{jk}) (\nabla_{e_k} f) e_j} \overset{0}{=} X^i g^{jk} \nabla_{e_i} (\nabla_{e_k} f) e_j = g^{ia} (\nabla_{e_a} f) g^{jk} (\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} f) e_j. \end{aligned}$$

Znikające wyrazy to pokłosie odpowiednio beztorsyjności (**Wzory użyteczne 3**) i metryczności (**Wzory użyteczne 2**) koneksji. Z warunków zadania wiemy, że wyrażenie $g^{ij}(\nabla_{e_i} f)(\nabla_{e_j} f)$ jest stałe, więc jego pochodna będzie 0. Dzięki temu:

$$\begin{aligned} g^{ij}(\nabla_{e_a} \nabla_{e_i} f)(\nabla_{e_j} f) + g^{ij}(\nabla_{e_i} f)(\nabla_{e_a} \nabla_{e_j} f) &= 0, \\ (\nabla_{e_a} \nabla_{e_i} f)(\nabla_{e_j} f) &= -(\nabla_{e_i} f)(\nabla_{e_a} \nabla_{e_j} f). \end{aligned}$$

Z symetryczności metryki, beztorsyjności koneksji (konkretniej komutacji pochodnych kowariantnych funkcji skalarnej przedstawionej w **Zadaniu 1.18.**) i powyższej własności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= g^{jk} g^{ia} (\nabla_{e_a} f)(\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} f) e_j = g^{jk} g^{ia} (\nabla_{e_a} f)(\nabla_{e_k} \nabla_{e_i} f) e_j = \\ &= -g^{jk} g^{ia} (\nabla_{e_k} \nabla_{e_a} f)(\nabla_{e_i} f) e_j = -g^{jk} g^{ai} (\nabla_{e_a} f)(\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} f) e_j \\ \implies \nabla_X X &= 0. \end{aligned}$$

Widzimy, że otrzymaliśmy dokładnie to samo wyrażenie co na początku tylko z ujemnym znakiem. To oznacza, że całość musi być równe zeru.

Rozwiązanie 1.20. Korzystając z definicji (**Wzory użyteczne 5**) rozpiszmy dwuformę krzywizny \tilde{R}^i_j :

$$\tilde{R}^i_j = d\tilde{\Gamma}^i_j + \tilde{\Gamma}^i_k \wedge \tilde{\Gamma}^k_j.$$

Jako, że powyższe wyrażenie jest dosyć długie i skomplikowane, rozbijemy je na części. Najsamprzód rozpisujemy różniczkę formy koneksji:

$$\begin{aligned} d\tilde{\Gamma}^i_j &= d(A^{-1})^i_a \wedge \Gamma^a_b A^b_j + (A^{-1})^i_a d\Gamma^a_b A^b_j - (A^{-1})^i_a \Gamma^a_b \wedge dA^b_j + d(A^{-1})^i_k \wedge dA^k_j = \\ &= -(A^{-1})^i_m dA^m_n (A^{-1})^n_a \wedge \Gamma^a_b A^b_j - (A^{-1})^i_a \Gamma^a_b \wedge dA^b_j + (A^{-1})^i_a d\Gamma^a_b A^b_j + \\ &\quad - (A^{-1})^i_m dA^m_n (A^{-1})^n_k \wedge dA^k_j. \end{aligned}$$

Teraz rozpiszmy iloczyn zewnętrzny form koneksji:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^i_k \wedge \tilde{\Gamma}^k_j &= [(A^{-1})^i_a \Gamma^a_b A^b_k + (A^{-1})^i_d dA^d_k] \wedge [(A^{-1})^k_m \Gamma^m_n A^n_j + (A^{-1})^k_e dA^e_j] = \\ &= (A^{-1})^i_a \Gamma^a_b A^b_k \wedge (A^{-1})^k_m \Gamma^m_n A^n_j + (A^{-1})^i_a \Gamma^a_b A^b_k \wedge (A^{-1})^k_e dA^e_j + \\ &\quad + (A^{-1})^i_d dA^d_k \wedge (A^{-1})^k_m \Gamma^m_n A^n_j + (A^{-1})^i_d dA^d_k \wedge (A^{-1})^k_e dA^e_j = \\ &= (A^{-1})^i_a \Gamma^a_m \wedge \Gamma^m_n A^n_j + (A^{-1})^i_a \Gamma^a_e \wedge dA^e_j + \\ &\quad + (A^{-1})^i_d dA^d_k \wedge (A^{-1})^k_m \Gamma^m_n A^n_j + (A^{-1})^i_d dA^d_k \wedge (A^{-1})^k_e dA^e_j. \end{aligned}$$

Widzimy, że odpowiednio pokolorowane wyrażenia wzajemnie się znoszą, zatem:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_j &= (A^{-1})^i_a d\Gamma^a_b A^b_j + (A^{-1})^i_a \Gamma^a_m \wedge \Gamma^m_n A^n_j = \\ &= (A^{-1})^i_a [d\Gamma^a_n + \Gamma^a_m \wedge \Gamma^m_n] A^n_j = (A^{-1})^i_a R^a_n A^n_j. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.21. Z definicji dwuformy krzywizny (**Wzory użyteczne 5**) otrzymujemy :

$$R_{ij} = g_{ik} R^k_j = g_{ik} d\Gamma^k_j + g_{ik} \Gamma^k_m \wedge \Gamma^m_j = g_{ik} d\Gamma^k_j + \Gamma_{im} \wedge \Gamma^m_j.$$

Sprawdzamy, że każdy ze składników jest antysymetryczny względem zamiany indeksów "i" oraz "j". Na początek obliczmy iloczyn zewnętrzny form koneksji:

$$\Gamma_{im} \wedge \Gamma^m_j = -\Gamma_{mi} \wedge \Gamma^m_j = \Gamma^m_j \wedge \Gamma_{mi} = \Gamma_{mj} \wedge \Gamma^m_i = -\Gamma_{jm} \wedge \Gamma^m_i.$$

Skorzystano z antysymetryczności formy koneksji w pierwszych dwóch wskaźnikach (po opuszczeniu pierwszego z nich!) przedstawionej w **Zadaniu 1.20.** Przechodzimy do obliczenia różniczki zewnętrznej formy koneksji:

$$g_{ik} d\Gamma^k_j = d\Gamma_{ij} - dg_{ik} \wedge \Gamma^k_j = -d\Gamma_{ji} - dg_{ik} \wedge \Gamma^k_j = -dg_{jk} \wedge \Gamma^k_i - g_{jk} d\Gamma^k_i - dg_{ik} \wedge \Gamma^k_j.$$

Z metryczności koneksji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla g_{ij} &= dg_{ij} - \Gamma^k_i g_{kj} - \Gamma^k_j g_{ik} = 0, \\ dg_{ij} &= \Gamma^k_i g_{kj} + \Gamma^k_j g_{ik} = \Gamma_{ji} + \Gamma_{ij} = 0, \end{aligned}$$

Dzięki czemu:

$$g_{ik} d\Gamma^k_j = -g_{jk} d\Gamma^k_i,$$

co oznacza, że dwuforma R_{ij} jest antysymetryczna.

Rozwiązanie 1.22. Przyjmujemy ortonormalny koreper $\{e^i\}$:

$$e^0 = e^\psi dt, \quad e^1 = e^\psi dr, \quad e^2 = r d\theta, \quad e^3 = r \sin \theta d\phi,$$

dzięki czemu metryka przyjmuje postać metryki Minkowskiego (**Wzory użyteczne 16**). Następnym krokiem jest obliczenie różniczek elementów koreperu:

$$\begin{aligned} de^0 &= \phi_{,r} e^{-\psi} e^1 \wedge e^0, & de^1 &= \psi_{,t} e^{-\phi} e^0 \wedge e^1, \\ de^2 &= \frac{e^{-\psi}}{r} e^1 \wedge e^2, & de^3 &= \frac{e^{-\psi}}{r} e^1 \wedge e^3 + \frac{\text{ctg } \theta}{r} e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Używając powyższych rachunków możemy zapisać różniczkę repera w bazie dwuform zdefiniowanych przez iloczyn zewnętrzny elementów tegoż repera (tak jak to było zrobione w **Zadaniu 1.18.**):

$$de^i = \frac{1}{2} \gamma^i_{jk} e^j \wedge e^k, \quad \gamma^i_{jk} = -\gamma^i_{kj},$$

gdzie jedyne niezerowe funkcje γ^i_{jk} to:

$$\gamma^0_{10} = 2\phi_{,r} e^{-\psi}, \quad \gamma^1_{01} = 2\psi_{,t} e^{-\phi}, \quad \gamma^2_{12} = \frac{2e^{-\psi}}{r}, \quad \gamma^3_{13} = \frac{2e^{-\psi}}{r}, \quad \gamma^3_{23} = \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r}.$$

Formę koneksji obliczamy z poniższego wzoru, który został wyprowadzony w **Zadaniu 1.18.**:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\gamma_{ijk} + \gamma_{jki} - \gamma_{kij}), \quad \Gamma_{ijk} = -\Gamma_{jik},$$

przy czym pierwsze indeksy γ zostały obniżone przez metrykę. Jedynymi niezerowymi formami koneksji są:

$$\Gamma_{01} = -2(\phi_{,r} e^{-\psi}) e^0 - 2(\psi_{,t} e^{-\phi}) e^1, \quad \Gamma_{21} = \frac{2e^{-\psi}}{r} e^2, \quad \Gamma_{31} = \frac{2e^{-\psi}}{r} e^3, \quad \Gamma_{32} = \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r} e^3.$$

Dzięki temu możemy zapisać macierz jednoformy koneksji:

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -(\phi_{,r} e^{-\psi}) e^0 - (\psi_{,t} e^{-\phi}) e^1 & 0 & 0 \\ (\phi_{,r} e^{-\psi}) e^0 + (\psi_{,t} e^{-\phi}) e^1 & 0 & -\frac{e^{-\psi}}{r} e^2 & -\frac{e^{-\psi}}{r} e^3 \\ 0 & \frac{e^{-\psi}}{r} e^2 & 0 & -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} e^3 \\ 0 & \frac{e^{-\psi}}{r} e^3 & \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} e^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedynymi nieznikającymi elementami dwuformy krzywizny (**Wzory użyteczne 5**) są:

$$\begin{aligned} R_{01} &= [e^{-2\psi} (-\psi_{,r} \phi_{,r} + \phi_{,rr} + \phi_{,r}^2) + e^{-2\phi} (\phi_{,t} \psi_{,t} - \psi_{,tt} - \psi_{,t}^2)] e^0 \wedge e^1, \\ R_{02} &= \frac{\phi_{,r} e^{-2\psi}}{r} e^0 \wedge e^2 + \frac{\psi_{,t} e^{-\psi-\phi}}{r} e^1 \wedge e^2, \\ R_{03} &= \frac{\phi_{,r} e^{-2\psi}}{r} e^0 \wedge e^3 + \frac{\psi_{,t} e^{-\psi-\phi}}{r} e^1 \wedge e^3, \\ R_{12} &= \frac{\psi_{,t} e^{-\psi-\phi}}{r} e^0 \wedge e^2 + \frac{e^{-2\psi}}{r} e^1 \wedge e^2, \\ R_{13} &= \frac{\psi_{,t} e^{-\psi-\phi}}{r} e^0 \wedge e^3 + \frac{\psi_{,r} e^{-2\psi}}{r} e^1 \wedge e^3, \\ R_{23} &= \frac{1 - e^{-2\psi}}{r} e^2 \wedge e^3. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.23. Aby uprościć rachunki dokonajmy następującego podstawienia:

$$g = \frac{d\xi d\bar{\xi}}{(1 + \frac{k}{4}\xi\bar{\xi})^2} = 2e^{\Phi(\xi, \bar{\xi})} d\xi d\bar{\xi}.$$

Do wyznaczenia skalaru krzywizny (skalar Ricciego) trzeba najpierw obliczyć symbole Christoffela (**Wzory użyteczne 4**), a z ich pomocą współczynniki tensora Ricciego (**Wzory użyteczne 8**). Oznaczmy $\xi = x^1$, $\bar{\xi} = x^2$, dzięki czemu:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(2g_{\sigma 1,1} - g_{11,\sigma}) = g^{12}g_{12,1} = \Phi_{,\xi}, \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(g_{\sigma 1,2} - g_{12,\sigma} + g_{2\sigma,1}) = \frac{1}{2}g^{12}(g_{21,2} - g_{12,2} + g_{22,1}) = 0, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(2g_{\sigma 2,2} - g_{22,\sigma}) = 0.\end{aligned}$$

Z symetrii problemu (względem zamiany współrzędnych $\xi \leftrightarrow \bar{\xi}$), wynika, że ostatecznie niezerowe pozostaną tylko dwa (z sześciu) symbole Christoffela:

$$\Gamma^1_{11} = \Phi_{,\xi}, \quad \Gamma^2_{22} = \Phi_{,\bar{\xi}}.$$

Obliczamy współczynniki tensora Ricciego:

$$\begin{aligned}R_{11} &= \Gamma^\sigma_{11,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\sigma 1,1} + \Gamma^\sigma_{11}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\lambda 1}\Gamma^\lambda_{1\sigma} = 0, \\ R_{12} &= \Gamma^\sigma_{12,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\sigma 1,2} + \Gamma^\sigma_{12}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\lambda 1}\Gamma^\lambda_{2\sigma} = -\Gamma^1_{11,2} = -\Phi_{,\xi\bar{\xi}}.\end{aligned}$$

Ponownie korzystając z symetrii otrzymujemy dwa nieznikające wyrazy w tensorze Ricciego:

$$R_{12} = R_{21} = -\Phi_{,\xi\bar{\xi}}.$$

Z definicji skalaru Ricciego (**Wzory użyteczne 9**) uzyskujemy:

$$R = 2R_{12}g^{12} = -2\Phi_{,\xi\bar{\xi}}e^{-\Phi}.$$

Najpierw obliczamy drugą pochodną (korzystając z definicji Φ):

$$\begin{aligned}\Phi_{,\xi\bar{\xi}} &= \left[\ln \left(\frac{1}{2 \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right)^2} \right) \right]_{,\xi\bar{\xi}} = \left[-2 \ln \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right) \right]_{,\xi\bar{\xi}} = \left[\frac{-2}{1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi}} \cdot \frac{k \bar{\xi}}{4} \right]_{,\bar{\xi}} = - \left[\frac{k \bar{\xi}}{2 \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right)} \right]_{,\bar{\xi}} = \\ &= - \frac{k}{2 \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right)} + \frac{k \bar{\xi}}{2 \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right)^2} \cdot \frac{k \xi}{4} = - \frac{k}{2 \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right)^2} \left(1 + \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} - \frac{k}{4} \xi \bar{\xi} \right) = -k e^{\Phi}.\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$R = -2(-k)e^{\Phi}e^{-\Phi} = 2k.$$

Rozwiązanie 1.24. Przystępujemy do obliczenia współczynników koneksji (**Wzory użyteczne 4**):

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^0_{i0} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(g_{\sigma i,0} - g_{i0,\sigma} + g_{0\sigma,i}) = 0, \\
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma}(g_{\sigma i,j} - g_{ij,\sigma} + g_{j\sigma,i}) = -\frac{1}{2}g^{00}g_{ij,0} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ij}, \\
\Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma}(2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^i_{j0} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma}(g_{\sigma j,0} - g_{j0,\sigma} + g_{0\sigma,j}) = \frac{1}{2}g^{ik}g_{kj,0} = K^i_j, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma}(g_{\sigma j,k} - g_{jk,\sigma} + g_{k\sigma,j}) = 0.
\end{aligned}$$

Teraz obliczamy współczynniki tensora Ricciego (**Wzory użyteczne 8**):

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^{\sigma}_{00,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 0,0} + \Gamma^{\sigma}_{00}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 0}\Gamma^{\lambda}_{0\sigma} = -\Gamma^i_{i0,0} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i} = -\dot{K}^i_i - K^i_j K^j_i, \\
R_{0i} &= \Gamma^{\sigma}_{0i,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 0,i} + \Gamma^{\sigma}_{0i}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 0}\Gamma^{\lambda}_{i\sigma} = 0, \\
R_{ij} &= \Gamma^{\sigma}_{ij,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma i,j} + \Gamma^{\sigma}_{ij}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda i}\Gamma^{\lambda}_{j\sigma} = \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^k_{0k} - \Gamma^0_{ki}\Gamma^k_{j0} - \Gamma^k_{0i}\Gamma^0_{jk} = \\
&= -\frac{1}{2}\ddot{g}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}K^n_n + \frac{1}{2}g_{in}K^n_j + \frac{1}{2}g_{jn}K^n_i.
\end{aligned}$$

Obliczmy następujące wielkości:

$$\begin{aligned}
\dot{K}^i_j &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}g^{ik}g_{kj}\right) = \frac{1}{2}\left(-g^{im}g_{mn}g^{nk}g_{kj} + g^{ik}g_{kj}\dot{}\right) = -2K^n_n K^i_j + \frac{1}{2}g^{ik}g_{kj}\dot{}, \\
\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{g}_{ij} &= g_{in}\dot{K}^n_j + 2g_{in}K^n_m K^m_j, \\
\frac{1}{2}g_{ij}\dot{} &= \frac{1}{2}\delta^k_i g_{kj} = \frac{1}{2}g_{in}g^{nk}g_{kj} = g_{in}K^n_j.
\end{aligned}$$

Dzięki temu jedyne nieznikające współczynniki tensora Ricciego dają się zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -(\dot{H} + K^i_j K^j_i), \\
R_{ij} &= -g_{in}\dot{K}^n_j - g_{in}K^n_m K^m_j = -g_{in}(K^n_j + K^n_m K^m_j).
\end{aligned}$$

Rozwiązanie 1.25. Na czterowymiarowej czasoprzestrzeni M z metryką g jednowymiarowa rodzina obserwatorów zadaje dwuwymiarową powierzchnię S w ten sposób,

że przez każdy punkt tej przestrzeni przechodzi tylko jedna linia świata γ_s (parametr s "numeruje" obserwatorów) i każda z tych linii jest jednocześnie geodezyjną na M . Każda z tych krzywych może być opisywana jednym parametrem (np. czasem własnym τ) w następujący sposób:

$$\forall s : \gamma_s : [\tau_0, \tau_1] \ni \tau \mapsto \gamma_s^\mu(\tau) \in S \subset M.$$

Dzięki temu spostrzeżeniu na płaszczyźnie S wybieramy współrzędne (s, τ) , zaś rodzina $\{\gamma_s\}$ tworzy jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów na S . Aby powyższa sytuacja mogła zaistnieć, każda z linii świata γ_s musi być krzywą całkową tego samego pola wektorowego u , czyli:

$$\forall s : \dot{\gamma}_s = u,$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po parametrze τ . Pole u spełnia warunek geodezyjności (**Wzory użyteczne 13**) oraz ma charakter czasowy $u_\mu u^\mu = -1$. Koneksja na czasoprzestrzeni jest metryczna (**Wzory użyteczne 3**) i beztorsyjna (**Wzory użyteczne 2**). W oparciu o powyższe własności policzmy następującą wielkość:

$$0 = \nabla_\nu (u_\mu u^\mu) = \nabla_\nu (g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu) = g_{\mu\nu} u^\nu \nabla_\nu u^\mu + g_{\mu\nu} u^\mu \nabla_\nu u^\nu = 2u^\mu \nabla_\nu u_\mu,$$

Dzięki czemu otrzymujemy tożsamość:

$$u^\mu \nabla_\nu u_\mu = 0.$$

Na płaszczyźnie S poprowadzono krzywą $\tilde{\gamma}$ w taki sposób, by w chwili $\tau = t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$ przecinała każdą z γ_s pod kątem prostym. Aby opisać tę sytuację, trzeba wprowadzić pole wektorowe X styczne do $\tilde{\gamma}$:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = X,$$

którego iloczyn skalarny w chwili t_0 z wektorem u jest zero:

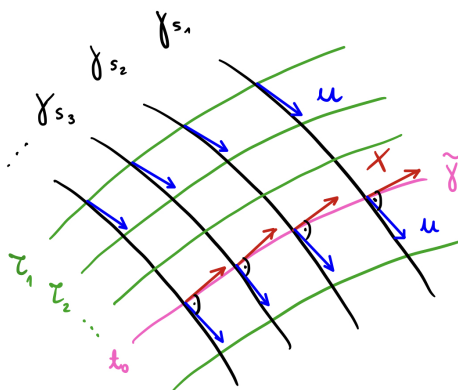
$$X^\mu u_\mu = 0.$$

Powyższa sytuacja odpowiada fizycznie zsynchronizowanie zegarków wszystkich obserwatorów. Jeśli ich zegarki mają pozostać zsynchronizowane wzdłuż krzywej $\tilde{\gamma}$ to znaczy, że iloczyn skalarny wektorów X i u wzdłuż krzywych całkowych γ_s pozostanie stały dla dowolnego τ . Żeby zbadać powyższą sytuację należy policzyć pochodną

Liego tego iloczynu wzdłuż pola u . Iloczyn skalarny, jak sama nazwa wskazuje jest skalarem, dzięki czemu zachodzi równość pochodnej Liego i pochodnej kowariantnej:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(X^\mu u_\mu) &= \nabla_u(X^\mu u_\mu) = X^\mu \nabla_u u^\mu + u_\mu \nabla_u X^\mu = u_\mu \nabla_u X^\mu = \\ &= u_\mu (u^\nu \partial_\nu X^\mu - X^\nu \partial_\nu u^\mu + X^\nu \partial_\nu u^\mu + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} u^\kappa X^\nu) = \\ &= u_\mu ([u, X]^\mu + X^\nu \nabla_\nu u^\mu) = [u, X]^\mu u_\mu.\end{aligned}$$

Komutator $[u, X] = 0$, gdyż transport wzdłuż krzywych γ_s i $\tilde{\gamma}$ jest niezależny (odwołując się *explicite* do definicji pochodnej Liego pola wektorowego) lub równoważnie stwierdzając, że (τ, s) są niezależnymi współrzędnymi opisującymi powierzchnię S co zostało zobrazowane na poniższym rysunku:



Dzięki temu:

$$\mathcal{L}_u(X^\mu u_\mu) = 0 \implies X^\mu u_\mu|_{\gamma_s} = \text{const}.$$

Rozdział 2

Równania Einsteina

Zadania

Zadanie 2.1. Znaleźć postać równań Einsteina dla metryki

$$g = 2dudv + g_{ab}(u) dx^a dx^b, \quad a, b \in \{2, 3\}.$$

Określić liczbę dowolnych funkcji w rozwiązaniach tych równań. Udowodnić istnienie wektorów Killinga $\xi = \xi^\mu(u) \partial_\mu$. Znaleźć liczbę niezależnych wektorów tego typu.

Zadanie 2.2. Udowodnić, że próżniowe równanie Einsteina ze stałą kosmologiczną Λ (Wzory użyteczne 11) ma sens wyłącznie dla rozmaitości o wymiarze różnym od dwóch.

Rozwiązania

Rozwiązanie 2.1. Macierz metryki odwrotnej jest postaci:

$$g^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & g^{ab}(u) \end{array} \right).$$

Przystępujemy do obliczenia symboli Christoffela:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma} (2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^0_{0i} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma} (g_{\sigma 0,i} - g_{0i,\sigma} + g_{i\sigma,0}) = 0, \\
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}g^{0\sigma} (g_{\sigma i,j} - g_{ij,\sigma} + g_{j\sigma,i}) = 0, \\
\Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma} (2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^i_{j0} &= \frac{1}{2}g^{i\sigma} (g_{\sigma j,0} - g_{j0,\sigma} + g_{0\sigma,j}) = \frac{1}{2}g^{i\sigma} g_{\sigma j}, \\
\Gamma^i_{j0} &\Rightarrow \Gamma^a_{c0} = \frac{1}{2}g^{ab} g_{bc,0} = \frac{1}{2}g^{ab} g_{bc}, \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma} (2g_{\sigma 1,1} - g_{11,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^1_{1a} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma} (g_{\sigma 1,a} - g_{1a,\sigma} + g_{a\sigma,1}) = 0, \\
\Gamma^1_{ab} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma} (g_{\sigma a,b} - g_{ab,\sigma} + g_{b\sigma,a}) = -\frac{1}{2}g^{10} g_{ab,0} = -\frac{1}{2}g_{ab}, \\
\Gamma^a_{11} &= \frac{1}{2}g^{a\sigma} (2g_{\sigma 1,1} - g_{11,\sigma}) = 0, \\
\Gamma^a_{b1} &= \frac{1}{2}g^{a\sigma} (g_{\sigma b,1} - g_{b1,\sigma} + g_{1\sigma,b}) = 0, \\
\Gamma^a_{bc} &= \frac{1}{2}g^{a\sigma} (g_{\sigma b,c} - g_{bc,\sigma} + g_{c\sigma,b}) = 0.
\end{aligned}$$

Jedynymi nieznikającymi współczynnikami koneksji są:

$$\Gamma^1_{ab}, \Gamma^a_{c0}.$$

Teraz należy policzyć współczynniki tensora Ricciego:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^{\sigma}_{00,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 0,0} + \Gamma^{\sigma}_{00} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 0} \Gamma^{\lambda}_{0\sigma} = -\Gamma^a_{a0,0} - \Gamma^a_{c0} \Gamma^c_{0a} = \\
&= -\frac{1}{2} [g^{ab} g_{ab}]_{,0} - \frac{1}{4} g^{ab} g_{bc} g^{cd} g_{da} = -\frac{1}{2} [g^{ab} g_{ab}]_{,u} - \frac{1}{4} g^{ab} g_{bc} g^{cd} g_{da}, \\
R_{0i} &= \Gamma^{\sigma}_{0i,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 0,i} + \Gamma^{\sigma}_{0i} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 0} \Gamma^{\lambda}_{i\sigma} = 0, \\
R_{11} &= \Gamma^{\sigma}_{11,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 1,1} + \Gamma^{\sigma}_{11} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 1} \Gamma^{\lambda}_{1\sigma} = 0, \\
R_{1a} &= \Gamma^{\sigma}_{1a,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma 1,a} + \Gamma^{\sigma}_{1a} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda 1} \Gamma^{\lambda}_{a\sigma} = 0, \\
R_{ab} &= \Gamma^{\sigma}_{ab,\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\sigma a,b} + \Gamma^{\sigma}_{ab} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda a} \Gamma^{\lambda}_{b\sigma} = 0.
\end{aligned}$$

Jedynym nieznikającym elementem tensora Ricciego jest R_{00} . Dodatkowo:

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0,$$

co oznacza, że równania Einsteina sprowadzają się do następującej postaci:

$$\begin{aligned} G_{00} = R_{00} &= 0, \\ 2[g^{ab} g_{ab}]_{,u} + g^{ab} g_{bc} g^{cd} g_{da} &= 0, \\ 2g^{ab} \ddot{g}_{ab} - g^{ab} \dot{g}_{bc} g^{cd} \dot{g}_{da} &= 0. \end{aligned}$$

Metryka g_{ab} opisuje podprzestrzeń o wymiarze 2, toteż posiada cztery elementy, jednakże z warunku symetryczności niezależne są jedynie trzy spośród nich, tzn:

$$g_{22}, g_{23} = g_{32}, g_{33}.$$

Wektory Killinga, które w naturalny sposób wynikają z budowy metryki to:

$$\xi_1 = \partial_v, \quad \xi_2 = \partial_2, \quad \xi_3 = \partial_3.$$

Jedynym nietrywialnym wektorem Killinga jest wektor następującej postaci:

$$\xi = \xi^2(u) \partial_2 + \xi^3(u) \partial_3.$$

Teraz pokażemy, że faktycznie taki wektor istnieje:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g &= \mathcal{L}_\xi (g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33}(dx^3)^2) = \\ &= 2g_{22} dx^2 d\xi^2 + 2g_{23} d\xi^2 dx^3 + 2g_{23} dx^2 d\xi^3 + 2g_{33} dx^3 d\xi^3 = \\ &= 2dudx^2 [\dot{\xi}^2 g_{22} + \dot{\xi}^3 g_{23}] + 2dudx^3 [\dot{\xi}^3 g_{33} + \dot{\xi}^2 g_{23}] = 0, \end{aligned}$$

co implikuje:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^2 g_{22} + \dot{\xi}^3 g_{23} = 0, \\ \dot{\xi}^3 g_{33} + \dot{\xi}^2 g_{23} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}^2 \\ \dot{\xi}^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Otrzymujemy dzięki temu dwa typy rozwiązań:

$$\begin{cases} \xi^2, \xi^3 = \text{const}, & g_{ab} - \text{dowolna}, \\ \xi^2, \xi^3 = \text{dowolne}, & g_{ab} - \text{zdegenerowana: } \det g_{ab} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie 2.2. Na rozmaitości n -wymiarowej próżniowe równanie Einsteina ze stałą kosmologiczną Λ (**Wzory użyteczne 11**) ma postać:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu},$$

czyli nie występuje żadna materia ani pole oddziaływania (np. elektromagnetyczne, skalarne itp. pociągając za sobą $T_{\mu\nu} = 0$). Zwęzając obustronnie równanie z metryką odwrotną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R - \frac{n}{2} R &= -n\Lambda, \\ R &= \frac{-2n\Lambda}{2-n}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że dla dowolnej (nietrywialnej) wartości Λ w przypadku dwuwymiarowym, skalar Ricciego osiąga nieskończoność.

Rozdział 3

Modele kosmologiczne

Zadania

Zadanie 3.1. Czasoprzestrzeń przestrzennie jednorodna i izotropowa zdefiniowana jest tensorem metrycznym Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (**Wzory użyteczne 17**). Równania Einsteina sprowadzają do układu równań

$$\begin{cases} \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, k \in \{-1, 0, 1\} \\ \frac{3\ddot{a}}{a^2} = -4\pi(\rho + 3P), \end{cases}$$

gdzie ρ jest gęstością materii, zaś P jej ciśnieniem. Rozważyć przypadek dla $k = 0$ oraz $a(t) = At^{3/2}$, $A = \text{const}$.

1. Obliczyć ρ oraz P i zidentyfikować rodzaj ośrodka materialnego.
2. Zapisać tensor metryczny w postaci

$$g = a^2(t(\eta))(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

oraz znaleźć funkcję $\eta(t)$.

3. Czy z punktu $(t_0, 0, 0, 0)$ można zobaczyć każdego obserwatora o linii świata zadanej w następujący sposób:

$$(t, x_0, y_0, z_0) : \quad t > 0, x_0, y_0, z_0 = \text{const}?$$

4. Czy możliwe jest zobaczenie dowolnego obserwatora w przyszłości?

Rozwiązania

Rozwiązanie 3.1. Dla zadanych warunków

$$k = 0, \quad a(t) = At^{3/2}, \quad A = \text{const},$$

równania Einsteina przyjmują postać:

$$\begin{cases} 3 \left(\frac{3}{2t} \right)^2 = 8\pi\rho, \\ 3 \frac{3}{4t^2} = -4\pi(\rho + 3P). \end{cases}$$

1. Przechodzimy do rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \rho(t) = \frac{27}{32\pi t^2}, \\ P(t) = -\frac{15}{32\pi t^2}, \end{cases} \implies P(t) = -\frac{5}{9}\rho(t).$$

Powyższy związek pomiędzy ciśnieniem i gęstością służy do opisu ciemnej energii.

2. Dokonajmy pewnego przekształcenia metryki:

$$g = a^2(t) (-a^{-2}(t)dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Wprowadźmy zmienną η , która spełnia:

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{1}{a(t)} dt = \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{A} dt, \\ \eta(t) &= -\frac{2}{A\sqrt{t}} + \eta_0. \end{aligned}$$

Odwracając powyższą relację uzyskamy $t(\eta)$, które należy wstawić do metryki. Dzięki temu:

$$\begin{aligned} t(\eta) &= \frac{4}{A^2(\eta_0 - \eta)^2} = \left(\frac{2}{A(\eta_0 - \eta)} \right)^2 \\ a(t(\eta)) &= A \left(\frac{2}{A(\eta_0 - \eta)} \right)^3, \\ g &= A^2 \left(\frac{2}{A(\eta_0 - \eta)} \right)^6 (-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

3. Warunkiem na zobaczenie się dwóch obserwatorów jest połączenie ich wektorem czasowym lub zerowym, zatem definiując czterowektory obserwatorów w następujący sposób:

$$x = [t_0, 0, 0, 0], \quad y = [t, x_0, y_0, z_0],$$

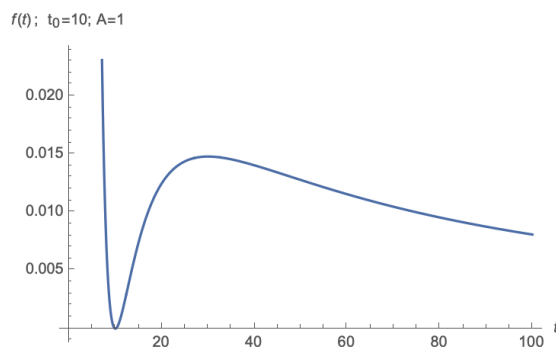
zachodzi poniższa nierówność:

$$\begin{aligned} (g_{FLRW})_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) &\leq 0, \\ -(t_0 - t)^2 + a^2(t)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) &\leq 0, \\ A^2 t^3(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) &\leq (t_0 - t)^2. \end{aligned}$$

Czas płynie od chwili $t = 0$ co oznacza, że w tej chwili czasu widać wszystkich obserwatorów - wszyscy są "zbiti" w jeden punkt, co wynika z postaci metryki - dla $t = 0$ jest ona zdegenerowana. Aby zobaczyć, co dzieje się dalej przekształcimy tę nierówność do poniższej postaci:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq \frac{(t_0 - t)^2}{A^2 t^3} = f(t).$$

Zbadajmy teraz tę funkcję. Obliczając jej pierwszą i drugą pochodną otrzymamy informację, że owa funkcja ma dwa ekstrema - w t_0 (minimum) i w $3t_0$ (maksimum). Wykres tej funkcji zaprezentowano poniżej:



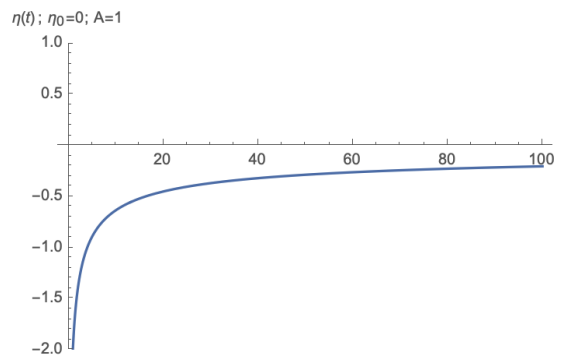
W granicy $t \rightarrow +\infty$ funkcja dąży do zera, co z postaci metryki można zinterpretować jako rozciąganie przestrzeni (względem czasu) do nieskończoności - oznacza to, że stożek świetlny robi się coraz "węższy" bo coraz dłuższy czas jest potrzebny do pokonania danej odległości, przez co lewa strona nierówności także dąży do zera. Warto zauważyć, że lewa strona jest w każdej chwili czasu stała, co oznacza, że istnieje możliwość zobaczenia każdego obserwatora, ale z całą pewnością nie można zobaczyć wszystkich "na raz".

4. Gdy przejdziemy do współrzędnych (η, x, y, z) metryka przyjmuje powyższą postać. Chcemy zobaczyć dowolnego obserwatora w przyszłości, toteż czas $t \in [0, +\infty[$. Zbadajmy wartości graniczne funkcji $\eta(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \eta(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta_0 - \frac{2}{A\sqrt{t}} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = \eta_0 - \frac{2}{A\sqrt{t}} = \eta_0.$$

Wykres $\eta(t)$ przedstawia poniższy wykres:

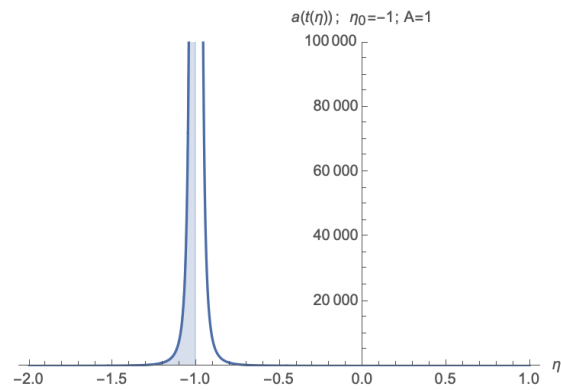


Wobec tego $\eta \in]-\infty, \eta_0]$. Teraz zbadajmy jak zachowuje się $a(\eta)$ na granicach dziedziny:

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} a(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} A \left(\frac{2}{A(\eta_0 - \eta)} \right)^3 = 0^+,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_0^-} a(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \eta_0^-} A \left(\frac{2}{A(\eta_0 - \eta)} \right)^3 = +\infty,$$

Na poniższym wykresie można zobaczyć zależność $a(\eta)$:



Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że metryka "w międzyczasie" nie ulega degeneracji ani żadnym innym dziwnym odkształceniom - czasoprzestrzeń jedynie ulega inflacji. Oznacza to, że wszyscy obserwatorzy będą mogli się zobaczyć w przyszłości.

Rozdział 4

Czarne dziury

Zadania

Zadanie 4.1. Rozpatrzmy pustą czasoprzestrzeń Schwarzschilda z metryką g_{Schw} (**Wzory użyteczne 18**) zdefiniowaną dla $r > 2M$, a w niej geodezyjną zerową γ , czyli krzywą opisywaną wzorem

$$\gamma : [s_0, s_1] \ni s \mapsto \left(t(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \phi(s) \right),$$

taką, że wektor doń styczny k spełnia warunek geodezyjności (**Wzory użyteczne 13**) dla metrycznej i beztorsyjnej koneksji.

1. Wyprowadzić dla krzywej γ równanie postaci

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + W(r, L) = \frac{1}{2}E^2,$$

gdzie E (energia) i L (moment pędu) są odpowiednimi stałymi ruchu, zaś $W(r, L)$ to efektywny potencjał grawitacyjny.

2. Zbadać przebieg potencjału efektywnego W jako funkcja r przy zadanym L .
3. Wykazać, że geodezyjna przy odpowiednich wartościach energii E oraz momentu pędu L może stanowić niestabilną orbitę kołową. Podać jej promień.
4. W przypadku orbity kołowej z punktu 3. obliczyć wartość $E(L)$.

5. W przypadku, gdy geodezyjna zaczyna się w nieskończoności ($r(s = -\infty) = \infty$) i zmierza w stronę centrum, podać warunek na wartość E i L , przy których geodezyjna z pewnością nie zacznie się już oddalać od centrum. Wyrazić wynik za pomocą pozornego parametru zderzenia b zdefiniowanego w następujący sposób:

$$b := \frac{L}{E}.$$

Zadanie 4.2. Rozpatrzmy tę samą czasoprzestrzeń co w **Zadaniu 4.1.** z tym, że pod horyzontem zdarzeń ($r < 2M$), gdzie wektor ∂_r jest czasowy. Załóżmy, że jest on zorientowany w przeszłość oraz geodezyjną czasową, czyli krzywą γ zadaną wzorem

$$\gamma : [s_0, s_1] \ni s \mapsto \left(t(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \phi(s) \right),$$

dla której wektor styczny u spełnia warunek geodezyjności (**Wzory użyteczne 13**) dla beztorsyjnej i metrycznej koneksji.

1. Wyprowadzić dla krzywej γ równanie postaci:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r, L) = \frac{1}{2}E^2,$$

gdzie E (energia z punktu widzenia drugiej strony horyzontu) oraz L (moment pędu) to odpowiednie stałe ruchu. Podać jawną postać efektywnego potencjału $V(r, L)$.

2. W przypadku $L = 0$ obliczyć czas własny s_c , po którym $r(s_c) = 0$.

Wskazówka: Efektywny potencjał $V(r, L)$ geodezyjnej czasowej wyraża się tym samym wzorem, co potencjał geodezyjnej czasowej w obszarze $r > 2M$.

Zadanie 4.3. Punkt materialny znajduje się w pustej czasoprzestrzeni Schwarzschilda (**Wzory użyteczne 18**) wewnątrz horyzontu zdarzeń ($r < 2M$) i porusza się po geodezyjnej czasowej. Znaleźć czas T_{max} , przed upływem którego (na zegarku poruszającym się wraz z punktem) geodezyjna osiągnie osobliwość $r = 0$.

Zadanie 4.4. Dany jest wektor Killinga $\xi = \partial_t$ dla metryki Schwarzschilda g_{Schw} (**Wzory użyteczne 18**) na hiperpowierzchni $r = 2M$. Wykazać, że spełnia on poniższą równość:

$$\nabla_\xi \xi = \kappa \xi.$$

Obliczyć współczynnik κ nazywany grawitacją powierzchniową.

Zadanie 4.5. Znaleźć krzywiznę zewnętrzną (**Wzory użyteczne 14**) w geometrii Schwarzschilda (**Wzory użyteczne 18**) na powierzchni $r = const$ i znaleźć jej granicę, gdy $r \rightarrow 2M$.

Rozwiązania

Rozwiązanie 4.1. Na czasoprzestrzeni Schwarzschilda (dla $r > 2M$) dana jest krzywa γ będąca geodezyjną zerową zadaną w następujący sposób

$$\gamma : [s_0, s_1] \ni s \mapsto [t(s), r(s), \frac{\pi}{2}, \phi(s)],$$

co oznacza, że wektor k doń styczny ma postać:

$$k = k^i \partial_i = \dot{\gamma}^i \partial_i = \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\phi} \partial_\phi.$$

Aby γ była zerową geodezyjną, wektor k musi spełniać następujące warunki:

$$1. k^i k_i = 0 \quad \wedge \quad 2. \nabla_k k = 0.$$

Najpierw wyznaczamy zerowość wektora k (warunek 1.):

$$\begin{aligned} k^i k_i &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 0; \\ \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r^2 \dot{\phi}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Przejdźmy do geodezyjności wektora k (warunek 2.):

$$\begin{aligned} \nabla_k k &= k^i \nabla_i k^j \partial_j = k^i (k^j_{,i} + \Gamma^j_{ia} k^a) \partial_j = (\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j_{,i} + \Gamma^j_{ia} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^a) \partial_j = \\ &= \left(\dot{\gamma}^i \frac{ds}{dx^i} \left(\frac{d}{ds} \dot{\gamma}^j \right) + \Gamma^j_{ia} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^a \right) \partial_j = (\ddot{\gamma}^j + \Gamma^j_{ia} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^a) \partial_j = 0. \end{aligned}$$

Jako że wektor k jest rozpisany w bazie ortogonalnej (*stricte* holonomicznej), to każdy z wektorów bazowych jest niezależny, co oznacza, że powyższa równość zachodzi dla każdej składowej wektora k . Do rozwiązania powyższego równania niezbędne są współczynniki koneksji, która ma być metryczna (**Wzory użyteczne 2**) i beztorcyjna (**Wzory użyteczna 3**). Z tych warunków wynika, że współczynniki koneksji w bazie holonomicznej są symetryczne w dwóch pierwszych dolnych wskaźnikach odzwierciedlając wzór na symbole Christoffela (**Wzory użyteczne 4**). Jedyne nieznikające

współczynniki koneksji dla metryki Schwarzschilda to:

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2} g^{tt} g_{tt,r} = \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \\
\Gamma^r_{tt} &= -\frac{1}{2} g^{rr} g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,r} = -\frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{rr} g_{\phi\phi,r} = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta, \\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\phi\phi,\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,r} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{1}{2} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\theta} = \text{ctg } \theta.
\end{aligned}$$

1. Na samym początku założono, że $\theta = \frac{\pi}{2}$ co oznacza, że warunek 2. generuje trzy niezależne równania na $t(s)$, $r(s)$ i $\phi(s)$, zatem:

$$\begin{aligned}
t(s) : \quad \ddot{t} + \Gamma^t_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b &= \ddot{t} + 2\Gamma^t_{tr} \dot{t} \dot{r} = \ddot{t} + \frac{2M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{t} \dot{r} = 0, \\
\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{t} + \frac{2M}{r^2} \dot{t} \dot{r} &= \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \\
\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} &= E = \text{const}; \\
\phi(s) : \quad \ddot{\phi} + \Gamma^\phi_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b &= \ddot{\phi} + 2\Gamma^\phi_{\phi r} \dot{\phi} \dot{r} + 2\Gamma^\phi_{\phi\theta} \dot{\phi} \dot{\theta} = \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} = 0, \\
r^2 \ddot{\phi} + 2r \dot{r} \dot{\phi} &= \frac{d}{ds} [r^2 \dot{\phi}] = 0, \\
r^2 \dot{\phi} &= L = \text{const}; \\
r(s) : \quad \ddot{r} + \Gamma^r_{ab} \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b &= \ddot{r} + \Gamma^r_{rr} \dot{r} \dot{r} + \Gamma^r_{\theta\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} + \Gamma^r_{\phi\phi} \dot{\phi} \dot{\phi} = \\
&= \ddot{r} + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{r}^2 - r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0, \\
\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{r} + \frac{M}{r^2} E^2 - \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= 0. \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Korzystając z powyżej wyznaczonych stałych E (energia) i L (moment pędu) wracamy do warunku 1.

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r^2 \dot{\phi}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 &= 0, \\ \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= \frac{E^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

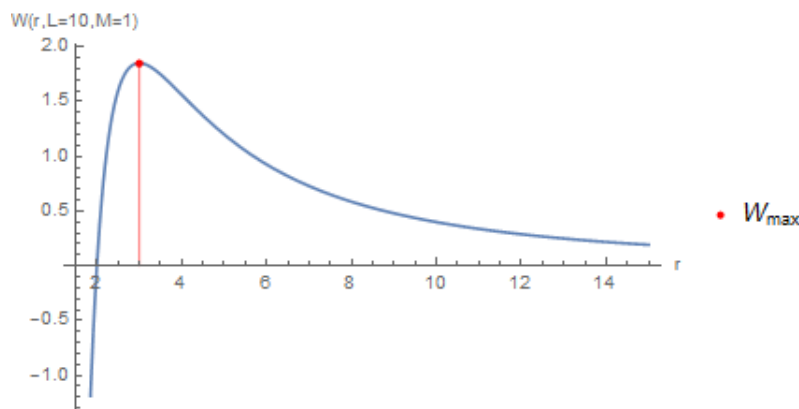
Dzięki takiej postaci widać, że efektywny potencjał $W(r, L)$ ma postać:

$$W(r, L) = \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

2. Potencjał posiada jedno miejsce zerowe $r_0 = 2M$. Chcąc znaleźć ekstrema tego potencjału obliczamy miejsca zerowe jego pochodnej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} W(r) &= -\frac{L^2}{r^3} + \frac{3L^2 M}{r^4} = 0 \Rightarrow r = 3M, \\ W_{max} &= W(r = 3M) = \frac{L^2}{2 \cdot 9M^2} \left(1 - \frac{2M}{3M}\right) = \frac{L^2}{54M^2}. \end{aligned}$$

Okazuje się, że potencjał dla $r = 3M$ osiąga maksimum, co prezentuje powyższy wykres:



Przyjrzyjmy się jeszcze raz równaniu na radialną składową geodezyjnej i wprowadźmy nową zmienną:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{r}, \\ \dot{x} &= -\frac{1}{r^2} \dot{r} = -x^2 \dot{r}, \end{aligned}$$

co daje nam

$$\frac{\dot{x}^2}{x^4} + L^2 x^2 (1 - 2Mx) = E^2.$$

Dodatkowo zakładamy, że $x = x(\phi(s))$ dzięki czemu:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\phi} \dot{\phi} = x' \dot{\phi}.$$

Podstawiamy:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2 \dot{\phi}^2}{x^4} + L^2 x^2 (1 - 2Mx) &= E^2, \\ L^2 x'^2 + L^2 x^2 (1 - 2Mx) &= E^2, \\ 2x' x'' + 2x x' (1 - 2Mx) - 2M x^2 x' &= 0, \\ x'' + x - 3M x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Co ciekawe, to samo równanie można uzyskać korzystając z równania (4.1). Jest to równanie, którego nie można rozwiązać analitycznie.

3. i 4. Przyjrzyjmy się równaniu (4.2) w przypadku, gdy umieścimy ciało na orbicie $r = 3M$ (ekstremum potencjału $W(r, L)$ z zerową radialną prędkością początkową ($\dot{r}(0) = 0$), wtedy równanie (4.2) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{L^2}{9M^2} \left(1 - \frac{2}{3}\right), \\ E &= \frac{L}{\sqrt{27}M} = \frac{L\sqrt{3}}{9M}, \\ b^2 &= 27M^2, \end{aligned}$$

gdzie $b = \frac{L}{E}$ to tzw. pozorny parametr zderzenia. Na tej podstawie kąt $\phi(s)$ zmienia się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L^2}{r^2} = \frac{L^2}{9M^2}, \\ \phi(s) &= \frac{L^2}{9M^2} s + \phi_0, \end{aligned}$$

co oznacza, że utrzymywany jest stały promień i prędkość kątowa jest stała, jednakże jest to maksimum potencjału, co oznacza, że minimalne wytrącenie z

poziomu $r = 3M$ spowoduje zaburzenie tego ruchu co można pokazać różniczkując równanie (4.2) i patrząc jak się zachowuje w przedziale $r \in [2M - \epsilon, 2M + \epsilon]$:

$$\ddot{r} + \frac{3L^2M}{r^4} - \frac{L^2}{r^3} = 0,$$

$$r = 2M - \epsilon \quad : \quad \ddot{r} = \frac{-\epsilon L^2}{(2M - \epsilon)^4} < 0 \text{--prędkość maleje, ciało "spada" na centrum,}$$

$$r = 2M + \epsilon \quad : \quad \ddot{r} = \frac{\epsilon L^2}{(2M + \epsilon)^4} > 0 \text{--prędkość rośnie, ciało oddala się od centrum.}$$

Do dopięcia całego opisu geodezyjnej zobaczymy jak zachowuje się czas $t(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = 3E, \\ t(s) &= 3Es + t_0 \end{aligned}$$

co oznacza, że upływ czasu własnego s jest jednostajny względem czasu geometrycznego t , różnica występuje w postaci czynnika multiplikatywnego $3E$.

5. Innym ciekawym przypadkiem jest zbliżanie się ciała z bardzo daleka

$$r(s_0 = -\infty) = \infty.$$

Aby ciało zbliżało się do centrum musi zachodzić:

$$\dot{r} < 0$$

dla każdego s i znak pochodnej musi pozostać mniejszy od zera, zatem:

$$\begin{aligned} \dot{r}(s_0)^2 &= E^2, \\ \dot{r}(s) &= -E, \end{aligned}$$

gdzie $E > 0$. Z równania (4.2) wynika:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\sqrt{E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \\ \frac{1}{2} E^2 &> \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \end{aligned}$$

Powyższa nierówność powinna zachodzić dla każdego s czyli:

$$\begin{aligned} E^2 &> 2W_{max} = \frac{L^2}{27M^2}. \\ \frac{L^2}{E^2} = b^2 &< 27M^2. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 4.2. Tak jak to wcześniej miało miejsce obliczamy długość wektora u , którego krzywe całkowe γ mają być geodezyjnymi czasowymi. Pamiętając, że $r \in]0, 2M[$:

$$\begin{aligned} u_i u^i &= \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \dot{t}^2 - \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = -1, \\ \left(\frac{2M}{r} - 1\right)^2 \dot{t}^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right) r^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right) - \dot{r}^2 &= 0, \end{aligned}$$

Warunek na geodezyjność (**Wzory użyteczne 13**) ma taką samą postać jak w **Zadaniu 4.1.** dla wektora k (4.1), więc można od razu przepisać stałe ruchu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \dot{t} &= E, \\ r^2 \dot{\phi} &= L. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe rezultaty do wzoru na długość wektora u otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(\frac{2M}{r} - 1\right) - \left(\frac{2M}{r} - 1\right) &= E^2, \\ \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right) &= \frac{1}{2} E^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

1. Widać więc, że efektywny potencjał $V(r, L)$ ma postać:

$$V(r, L) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

Potencjał zeruje się dla $r_0 = 2M$ (rozwiązania zespolone uznajemy za нефизyczne). Kolejny krok to znalezienie ekstremów tego potencjału, więc:

$$\frac{\partial}{\partial r} V(r, L) = \frac{L^2(3M - r) + Mr^2}{2r^3} = 0 \Leftrightarrow r_{\pm} = \frac{L^2 \pm L \sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M},$$

gdzie $V(r_-)$ i $V(r_+)$ = to odpowiednio minimum i maksimum lokalne potencjału (zakładając, że $L^2 \geq 12M^2$), jednakże oba te ekstrema są poza obszarem analizowanej czasoprzestrzeni, bo:

$$\begin{aligned} L^2 &\geq 12M^2, \\ L &\in]-\infty, -2\sqrt{3}M] \cup [2\sqrt{3}M, +\infty[. \end{aligned}$$

Obliczmy granice r_{\pm} dla skrajnych (granicznych) wartości momentu pędu L :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow -\infty} r_- &= \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{|L|^2 + |L|^2 \sqrt{1 - \frac{12M^2}{|L|^2}}}{2M} = \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{2|L|^2 - 6M^2}{2M} = +\infty, \\ \lim_{L \rightarrow \pm 2\sqrt{3}M} r_- &= \lim_{L \rightarrow \pm 2\sqrt{3}M} \frac{L^2 - L \sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M} = 6M, \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} r_- &= \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{|L|^2 - |L|^2 \sqrt{1 - \frac{12M^2}{|L|^2}}}{2M} = \lim_{L \rightarrow -\infty} \frac{6M^2}{2M} = 3M, \\ \lim_{L \rightarrow -\infty} r_+ &= \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{|L|^2 - |L|^2 \sqrt{1 - \frac{12M^2}{|L|^2}}}{2M} = \lim_{L \rightarrow -\infty} \frac{+6M^2}{2M} = 3M, \\ \lim_{L \rightarrow \pm 2\sqrt{3}M} r_+ &= \lim_{L \rightarrow \pm 2\sqrt{3}M} \frac{L^2 + L \sqrt{L^2 - 12M^2}}{2M} = 6M, \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} r_+ &= \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{|L|^2 + |L|^2 \sqrt{1 - \frac{12M^2}{|L|^2}}}{2M} = \lim_{|L| \rightarrow \infty} \frac{2|L|^2 - 6M^2}{2M} = +\infty. \end{aligned}$$

Z powyższych rachunków wynika, że bez względu na znak momentu pędu wynik nie ulega zmianie (r_+ zamienia się z r_-) toteż możemy przyjąć następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} L &\geq 2\sqrt{3}M, \\ 6M &\geq r_- \geq 3M, \\ r_+ &\geq 6M. \end{aligned}$$

2. Dla $L = 0$ równanie (4.3) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right) &= \frac{1}{2} E^2, \\ \frac{(E^2 - 1)r + 2M}{r} &= \dot{r}^2. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następującą stałą:

$$\alpha = \frac{E^2 - 1}{2M},$$

dzięki której możemy zapisać powyższe równanie w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \pm \sqrt{2M \frac{\alpha r + 1}{r}}, \\
\sqrt{2M} s_c &= - \int_{r_0}^0 dr \sqrt{\frac{r}{\alpha r + 1}}, \\
\alpha r = \sinh^2 \theta &\Rightarrow \alpha dr = 2 \sinh \theta \cosh \theta d\theta, \\
\alpha \sqrt{2M\alpha} s_c &= 2 \int_0^{\operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha r_0}} d\theta \sinh \theta \cosh \theta \sqrt{\frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta}}, \\
\alpha \sqrt{2M\alpha} s_c &= 2 \int_0^{\operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha r_0}} d\theta \sinh^2 \theta, \\
\int d\theta \sinh^2 \theta &= \cosh \theta \sinh \theta - \int d\theta \cosh^2 \theta = \cosh \theta \sinh \theta - \theta - \int d\theta \sinh^2 \theta, \\
2 \int d\theta \sinh^2 \theta &= \cosh \theta \sinh \theta - \theta, \\
\alpha \sqrt{2M\alpha} s_c &= (\cosh \theta \sinh \theta - \theta)_0^{\operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha r_0}}, \\
s_c &= \pm \frac{1}{\alpha \sqrt{2M\alpha}} \left(\sqrt{\alpha r + 1} \sqrt{\alpha r} - \operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha r} \right)_0^{r_0}, \\
s_c &= \frac{\sqrt{\alpha r_0 + 1} \sqrt{\alpha r_0} - \operatorname{arsinh} \sqrt{\alpha r_0}}{\alpha \sqrt{2M\alpha}}.
\end{aligned}$$

Dla \dot{r} wybraliśmy rozwiązanie z „-” bo ciało spada, czyli r maleje (co oznacza ujemny znak pochodnej). Dla $\alpha = 0 \Rightarrow E^2 = 1$ rachunek jest jeszcze prostszy:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \pm \sqrt{\frac{2M}{r}}, \\
\sqrt{2M} s_c &= - \int_{r_0}^0 dr r^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r_0}, \\
s_c &= \frac{2}{3} r_0^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie 4.3. Tak jak to miało miejsce w **Rozwiązanie 4.2.** otrzymujemy

równania ruchu:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\phi} &= L, \\ \left(\frac{2M}{r} - 1\right) \dot{t} &= E, \\ \dot{r}^2 &= E^2 + \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right). \end{aligned}$$

Zakładamy, że dla $r = 2M$ $\dot{r} = 0$, co implikuje $E = 0$, zatem:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\sqrt{\left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right)}, \\ T_{max} &= -\int_0^{2M} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) \left(\frac{2M}{r} - 1\right)}}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie z „-” jest konsekwencją spadania ciała. Licząc pochodną po L funkcji podcałkowej, okaże się, że dla $L = 0$ przyjmuje ona maksimum, toteż:

$$\begin{aligned} T_{max} &= -\int_0^{2M} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}} = -\int_0^{2M} dr \sqrt{\frac{\frac{r}{2M}}{1 - \frac{r}{2M}}}, \\ \frac{r}{2M} &= \sin^2 \theta, \\ \frac{dr}{2M} &= 2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ T_{max} &= -2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = -4M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta, \\ T_{max} &= -2M (\cos \theta \sin \theta - \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi M. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 4.4. Wprowadźmy współrzędne Eddingtona-Finklesteina:

$$\begin{aligned} \{x^\mu\} &= (t, r, \theta, \phi) \rightarrow \{\tilde{x}^\mu\} = (v, r, \theta, \phi), \\ dv &= dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ v &= t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \end{aligned}$$

Dzięki temu metryka Schwarzschilda g_{Schw} (**Wzory użyteczne 18**) przyjmuje po-

stać:

$$\begin{aligned} g &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(dv - dr \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega = \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Wektor Killinga metryki Schwarzschilda $\xi = \partial_t$ w nowych współrzędnych wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \xi &= \partial_t = \delta_t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{\xi}^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} = \tilde{\xi}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \delta_t^\mu &= \tilde{\xi}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}, \\ \tilde{\xi}^\nu &= \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial t} = \tilde{\delta}_v^\nu, \\ \xi &= \tilde{\delta}_v^\nu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} = \partial_v. \end{aligned}$$

Policzmy następującą wielkość:

$$\nabla_\xi \xi = \xi^\nu (\xi^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \xi^\kappa) \partial_\mu = \Gamma^\mu_{\nu\nu} \partial_\mu.$$

Korzystając z wyprowadzonego wzoru na koneksję (**Wzory użyteczne 2**) szukamy nieznikających wyrazów:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\kappa\nu,\nu} + (g_{\kappa\nu,\nu} - g_{\nu\nu,\kappa})) = -\frac{1}{2} g^{\mu r} g_{\nu\nu,r} = -\frac{1}{2} g^{vr} g_{\nu\nu,r}, \\ \Gamma^v_{\nu\nu} &= \frac{1}{2} \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{M}{r^2}. \end{aligned}$$

Na powierzchni $r = 2M$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \xi \Big|_{r=2M} &= \Gamma^v_{\nu\nu} \partial_v \Big|_{r=2M} = \frac{M}{r^2} \partial_v \Big|_{r=2M} = \frac{1}{4M} \partial_v = \kappa \xi, \\ \kappa &= \frac{1}{4M}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 4.5. Dla pustej czasoprzestrzeni Schwarzschilda opisananej przez metrykę g_{Schw} (**Wzory użyteczne 18**) wynika, że wektor normalny n do powierzchni S zadanej jako $r = const$ dany jest wzorem:

$$n = N \partial_r = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \partial_r.$$

Do wyznaczenia drugiej formy podstawowej (**Wzory użyteczne 14**) należy policzyć pochodną Liego metryki g_{Schw} względem wektora normalnego n :

$$\begin{aligned}
 K &= 2\mathcal{L}_n g_{Schw}|_S = 2\mathcal{L}_{N\partial_r} \left[-N^2 dt^2 + \frac{dr^2}{N^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]_S = \\
 &= 2 \left[-2N^2 N_{,r} dt^2 - \frac{2}{N^2} N_{,r} dr^2 + \frac{2}{N^2} dr dN + 2Nr (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]_S = \\
 &= \left| N_{,r} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \frac{2M}{r^2} = \frac{M}{Nr^2} \right| = 2 \left[-\frac{2MN}{r^2} dt^2 + 2Nr (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]_S .
 \end{aligned}$$

Macierz tensora krzywizny zewnętrznej K wygląda następująco:

$$K = \frac{4N}{r} \begin{pmatrix} -\frac{M}{r} & & & \\ & 0 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} .$$

Gdy $r \rightarrow 2M$ to $N = 0$, co oznacza że krzywizna zewnętrzna znika ($K(r = 2M) = 0$).

Rozdział 5

Fale grawitacyjne

Zadania

Zadanie 5.1. Znaleźć tensor krzywizny zewnętrznej K (**Wzory użyteczne 14**) na powierzchni S zdefiniowanej w następujący sposób:

$$S = \{(x^\mu) : u + v = \text{const}\} \quad (5.1)$$

dla metryki fali pp (**Wzory użyteczne 22** z $P = 1$).

Zadanie 5.2. Obliczyć pochodną Liego metryki g_{RT} (**Wzory użyteczne 22**) względem pola ∂_r i wykazać, że to pole jest styczne do zerowych linii geodezyjnych.

Zadanie 5.3. Znaleźć wszystkie geodezyjne w polu fali pp (**Wzory użyteczne 22** dla $P = 1$) w dwóch przypadkach:

1. $h(u, \xi, \bar{\xi}) = a \ln(\xi \bar{\xi})$,
2. $h(u, \xi, \bar{\xi}) = \frac{a}{v^2} \ln(\xi \bar{\xi})$.

Zadanie 5.4. Policzyc niezmiennik (skalar) Kretschmanna (**Wzory użyteczne 7**) dla metryki Minkowskiego z zaburzeniem w przybliżeniu liniowym (**Wzory użyteczne 20**).

Rozwiązania

Rozwiązanie 5.1. Skoro n jest wektorem normalnym to jego kowektor musi być proporcjonalny do różniczki $d(u + v)$, co można zapisać w następujący sposób:

$$n_\alpha \sim (u + v)_{,\alpha} = \delta_\alpha^0 + \delta_\alpha^1 ,$$

co po podniesieniu wskaźników zadaje wektor normalny, ze stałą normalizacyjną N :

$$n = n^\alpha \partial_\alpha = (n_\beta g^{\beta\alpha}) \partial_\alpha = N(g^{0\alpha} + g^{1\alpha}) \partial_\alpha.$$

Do policzenia współczynników n^α oraz stałej normalizacyjnej potrzebujemy metryki odwrotnej, zatem zapiszmy ją w postaci macierzowej:

$$g = \left(\begin{array}{cc|cc} 2H & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g} (g^D)^T,$$

gdzie g^D oznacza macierz dopełnień algebraicznych, uzyskujemy:

$$g^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 1 & -2H & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Dzięki temu:

$$n = N[(g^{00} + g^{01}) \partial_u + (g^{01} + g^{11}) \partial_v] = N[\partial_u + (1 - 2H) \partial_v].$$

Warunkiem normalizacji jest jednostkowa długość wektora normalnego, toteż:

$$n^2 = 1 = n_\alpha n^\alpha = N^2(2H + 2(1 - 2H)) = N^2 2(1 - H) \Rightarrow N = \sqrt{\frac{1}{2(1 - H)}}.$$

Posiadając wszystkie potrzebne elementy i pamiętając, że na powierzchni S zachodzi $du = dv$ przystępujemy do liczenia krzywizny zewnętrznej (**Wzory użyteczne 14**):

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g|_S = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{n^0 \partial_u} g|_S + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{n^1 \partial_v} g|_S = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_{N \partial_u} (2H du^2 + 2dudv)|_S + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{N(1-2H) \partial_v} (2dudv)|_S = \\ &= \frac{1}{2} [2NH_{,u} du^2 + 4H dudN + 2dvdN]|_S + dud [N(1 - 2H)]_S = \\ &= NH_{,u} du^2 + (2H - 1) dudN + (1 - 2H) dudN - 2N dudH = \\ &= N du (H_{,u} du - 2dH) = -N du (H_{,u} du + 2H_{,\xi} d\xi + 2H_{,\bar{\xi}} d\bar{\xi}). \end{aligned}$$

Dzięki temu możemy przedstawić tensor krzywizny zewnętrznej w postaci macierzowej:

$$K = -N \left(\begin{array}{c|ccc} H_{,u} & 0 & H_{,\xi} & H_{,\bar{\xi}} \\ \hline 0 & & & \\ H_{,\xi} & & 0 & \\ \hline H_{,\bar{\xi}} & & & \end{array} \right).$$

Rozwiązanie 5.2. Dla metryki Robinsona-Trautmana g_{RT} (**Wzory użyteczne 22**) definiujemy występujące w niej funkcje w następujący sposób:

$$H = H(u, r, \xi, \bar{\xi}), \quad P = P(u, \xi, \bar{\xi}).$$

Przystępujemy do policzenia pochodnej Liego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\partial_r} g_{RT} &= H_{,r} du^2 - \frac{4r}{P^2} d\xi d\bar{\xi} = \frac{2}{r} g_{RT} - \frac{2}{r} (H du^2 + 2du dr) + H_{,r} du^2 = \\ &= \frac{2}{r} g_{RT} + 2du \left[\left(\frac{H_{,r}}{2} - \frac{H}{r} \right) du - \frac{2}{r} dr \right] = \frac{2}{r} g_{RT} + g_{RT}(\partial_r)\omega, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\omega = \left(\frac{H_{,r}}{2} - \frac{H}{r} \right) du - \frac{2}{r} dr.$$

Do wykazania styczności wektora ∂_r względem zerowych linii geodezyjnych, wystarczy udowodnić, że jest wektorem zerowym (co trywialnie wynika z postaci tejże metryki):

$$g_{RT}(\partial_r, \partial_r) = 0.$$

Można to też pokazać w inny sposób, mianowicie niech $k = \partial_r = \delta_1^\nu \partial_\nu$, dzięki czemu:

$$g_{RT}(k) = k_\nu dx^\nu = 2du = 2u_{,\nu} dx^\nu \Rightarrow k_\nu = 2u_{,\nu}.$$

Powierzchnie zerowe zadane są warunkiem $u = const$, co implikuje:

$$u_{,\nu} u^{,\nu} = 0 \Rightarrow k_\nu k^\nu = 0.$$

Co więcej:

$$\begin{aligned} 0 &= u_{,\nu} u^{,\nu} = \nabla_\nu u \nabla^\nu u, \\ 0 &= \nabla_\alpha [\nabla_\nu u \nabla^\nu u] = (\nabla_\alpha \nabla_\nu u) \nabla^\nu u + \nabla_\nu u (\nabla_\alpha \nabla^\nu u) = 2(\nabla_\nu \nabla_\alpha u) \nabla^\nu u, \\ 0 &= 4u^{,\nu} (\nabla_\nu u_{,\alpha}) = k^\nu \nabla_\nu k_\alpha. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $k = \partial_r$ jest zarówno zerowe jak i geodezyjne (pod warunkiem, że mamy do czynienia z koneksją Leviego-Civity, co umożliwia zamianę kolejności pochodnych kowariantnych).

Rozwiązanie 5.3. Do wyznaczenia geodezyjnych niezbędne są symbole Christoffela (**Wzory użyteczne 4**), które zależą od elementów metryki odwrotnej, w tym celu zapiszmy macierz metryki g_{pp} (**Wzory użyteczne 22** dla $P = 1$), a następnie ją odwróćmy:

$$g_{pp} = \left(\begin{array}{cc|c} 2h & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & -1 \end{array} \right) \implies g_{pp}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & -2h & \\ \hline & & -1 \end{array} \right).$$

Dzięki temu możemy metrykę odwrotną zapisać jako kombinację liniową biwektorów:

$$g_{pp}^{-1} = (\partial_u \otimes \partial_v + \partial_v \otimes \partial_u) - 2h \partial_v \otimes \partial_v - (\partial_\xi \otimes \partial_{\bar{\xi}} + \partial_{\bar{\xi}} \otimes \partial_\xi).$$

Dzięki temu możemy przystąpić do obliczenia współczynników koneksji:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}) = 0, \\ \Gamma^0_{i0} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (g_{\sigma i,0} - g_{i0,\sigma} + g_{0\sigma,i}) = 0, \\ \Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2} g^{0\sigma} (g_{\sigma i,j} - g_{ij,\sigma} + g_{j\sigma,i}) = 0, \\ \Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}), \\ \Gamma^i_{j0} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (g_{\sigma j,0} - g_{j0,\sigma} + g_{0\sigma,j}) = \frac{1}{2} g^{i0} g_{00,j}, \\ \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{i\sigma} (g_{\sigma j,k} - g_{jk,\sigma} + g_{k\sigma,j}) = 0. \end{aligned}$$

Przejdźmy do równań na geodezyjne (**Wzory użyteczne 12**):

$$x^0 : \quad \begin{aligned} \ddot{u} + \Gamma^0_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0, \\ \ddot{u} &= 0, \end{aligned}$$

$$x^1 : \quad \begin{aligned} \ddot{v} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0, \\ \ddot{v} + \Gamma^1_{00} \dot{u}^2 + \Gamma^1_{i0} \dot{x}^i \dot{u} &= 0, \\ \ddot{v} + h_{,u} \dot{u}^2 + h_{,\xi} \dot{\xi} \dot{u} + h_{,\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \dot{u} &= 0, \end{aligned}$$

$$x^2 : \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} + \Gamma^2_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0, \\ \ddot{\xi} + \Gamma^2_{00} \dot{u}^2 &= 0, \\ \ddot{\xi} + \frac{1}{2} h_{,\bar{\xi}} \dot{u}^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$x^3 : \quad \begin{aligned} \ddot{\bar{\xi}} + \Gamma^3_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} + \Gamma^2_{00} \dot{u}^2 &= 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} + \frac{1}{2} h_{,\xi} \dot{u}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy układ czterech równań różniczkowych na h :

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0, \\ \ddot{v} + h_{,u} \dot{u}^2 + h_{,\xi} \dot{\xi} \dot{u} + h_{,\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \dot{u} = 0, \\ \ddot{\xi} + \frac{1}{2} h_{,\bar{\xi}} \dot{u}^2 = 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} + \frac{1}{2} h_{,\xi} \dot{u}^2 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

1. Rozwiązanie równania geodezyjnej względem $u(s)$ (Układ równań 5.2) ma postać:

$$u(s) = \dot{u}_0 s + u_0, \quad (5.3)$$

gdzie $\dot{u}_0 + u_0$ są stałymi całkowania. Przejdźmy do równań względem $\xi(s)$ i $\bar{\xi}(s)$:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \frac{a\dot{u}_0^2}{2\xi} = 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} + \frac{a\dot{u}_0^2}{2\bar{\xi}} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\xi} \ddot{\xi} = -\frac{a\dot{u}_0^2}{2}, \\ \xi \ddot{\bar{\xi}} = -\frac{a\dot{u}_0^2}{2}, \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\xi} \ddot{\xi} = \xi \ddot{\bar{\xi}} = -\frac{a\dot{u}_0^2}{2} = const, \\ \frac{\ddot{\bar{\xi}}}{\bar{\xi}} = \frac{\ddot{\xi}}{\xi}. \end{cases}$$

Postulujemy postać rozwiązania:

$$\begin{cases} \xi(s) = A e^{i\omega s}, \\ \bar{\xi}(s) = A e^{-i\omega s}, \end{cases}$$

gdzie A i ω są stałymi rzeczywistymi. Podstawiając do wyprowadzonego układu równań różniczkowych na ξ i $\bar{\xi}$ uzyskujemy zależność pomiędzy stałymi:

$$A\omega^2 = \frac{a\dot{u}_0^2}{2},$$

dzięki czemu nasze zapostulowane rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \xi(s) &= \frac{a\dot{u}_0^2}{2\omega^2} e^{i\omega s}, \\ \bar{\xi}(s) &= \frac{a\dot{u}_0^2}{2\omega^2} e^{-i\omega s}. \end{cases}$$

Ogólne rozwiązanie analityczne nie jest możliwe, więc poprzestajemy na tym szczególnym przypadku. Pozostało już jedynie policzyć $v(s)$, zatem:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + h_{,u} \dot{u}^2 + h_{,\xi} \dot{\xi} \dot{u} + h_{,\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \dot{u} &= 0, \\ \ddot{v} + \frac{a}{\xi} \dot{\xi} \dot{u} + \frac{a}{\bar{\xi}} \dot{\bar{\xi}} \dot{u} &= 0, \\ \ddot{v} + ia\omega \dot{u}_0 - ia\omega \dot{u}_0 &= 0, \\ \ddot{v} &= 0, \end{aligned}$$

co oznacza, że rozwiązanie można zapisać następująco:

$$v(s) = \dot{v}_0 s + v_0,$$

gdzie \dot{v}_0 i v_0 są stałymi. Podsumowując:

$$\begin{cases} u(s) &= \dot{u}_0 s + u_0, \\ v(s) &= \dot{v}_0 s + v_0, \\ \xi(s) &= \frac{a\dot{u}_0^2}{2\omega^2} e^{i\omega s}, \\ \bar{\xi}(s) &= \frac{a\dot{u}_0^2}{2\omega^2} e^{-i\omega s}. \end{cases}$$

2. Równanie na $u(s)$ jest takie samo jak w podpunkcie 1. (Wzór 5.3) toteż:

$$u(s) = \dot{u}_0 s + u_0.$$

Przejdźmy do równań na $\xi(s)$ i $\bar{\xi}(s)$:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \frac{a\dot{u}_0^2}{2\xi(\dot{u}_0 s + u_0)^2} = 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} + \frac{a\dot{u}_0^2}{2\bar{\xi}(\dot{u}_0 s + u_0)^2} = 0. \end{cases}$$

W mianowniku pojawia się jawna zależność od s - jest to układ niejednorodnych, nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu, które nie ma ogólnego analitycznego rozwiązania. Spróbujemy zatem "zabić" tę zależność od s poprzez nałożenie warunku $\dot{u}_0 = 0$, co implikuje:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = 0, \\ \ddot{\bar{\xi}} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} \xi(s) = \dot{\xi}_0 s + \xi_0, \\ \bar{\xi}(s) = \dot{\bar{\xi}}_0 s + \bar{\xi}_0, \end{cases}$$

gdzie $\dot{\xi}_0, \xi_0, \dot{\bar{\xi}}_0, \bar{\xi}_0$ to stałe. Przejdźmy do równania na $v(s)$, które uwzględniając warunek $\dot{u}_0 = 0$ jest postaci:

$$\ddot{v} = 0 \implies v(s) = \dot{v}_0 s + v_0,$$

gdzie \dot{v}_0 i v_0 to stałe. Podsumowując wszystkie równania:

$$\begin{cases} u(s) = u_0, \\ v(s) = \dot{v}_0 s + v_0, \\ \xi(s) = \dot{\xi}_0 s + \xi_0, \\ \bar{\xi}(s) = \dot{\bar{\xi}}_0 s + \bar{\xi}_0. \end{cases}$$

Rozwiązanie 5.4. Dopuszczamy wyłącznie liniowe wyrazy w zaburzeniach metryki fali płaskiej (**Wzory użyteczne 20**) i ich pochodnych. W założonym przybliżeniu liniowym wzór na współczynniki koneksji (**Wzory użyteczne 4**) sprowadza się do postaci:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (h_{\sigma\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\sigma} + h_{\nu\sigma,\mu}).$$

Współczynniki koneksji zależą od pierwszych pochodnych zaburzeń $h_{\mu\nu}$, czyli w liniowym przybliżeniu tensor Riemanna musi liniowo zależeć od koneksji i jej pochodnych, co implikuje:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} &= -\Gamma_{\lambda\mu,\nu}^{\kappa} + \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^{\kappa} = -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\sigma\lambda,\mu\nu} - h_{\lambda\mu,\sigma\nu} + h_{\mu\sigma,\lambda\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\sigma\lambda,\nu\mu} - h_{\lambda\nu,\sigma\mu} + h_{\nu\sigma,\lambda\mu}) = \frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\lambda\mu,\sigma\nu} - h_{\mu\sigma,\lambda\nu} - h_{\lambda\nu,\sigma\mu} + h_{\nu\sigma,\lambda\mu}). \end{aligned}$$

W analogiczny sposób obliczamy tensor Riemanna z odpowiednio podniesionymi i opuszczonymi wskaźnikami:

$$R_{\kappa}^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\kappa\sigma} (h^{\lambda\mu,\sigma\nu} - h^{\mu\sigma,\lambda\nu} - h^{\lambda\nu,\sigma\mu} + h^{\nu\sigma,\lambda\mu}).$$

Z rozwiązania równań Einsteina dla fali płaskiej wynikają następujące równości:

$$\begin{cases} \square h_{\mu\nu} &= 0, \\ h^\mu{}_\mu &= 0, \\ \forall_\mu h_{0\mu} &= 0, \\ h_{\mu\nu}{}^{,\nu} &= 0. \end{cases}$$

Z powyższych warunków wynika, że zaburzenie $h_{\mu\nu}$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{cases} h_{\mu\nu} &\mapsto h_{ij} = H_{ij} e^{-ix_\mu k^\mu}, \\ H^i{}_i &= 0, \\ k_\mu k^\mu &= 0, \\ h_{\mu\nu} k^\nu &= H_{ij} k^j = 0, \end{cases}$$

Podstawiamy powyższe rozwiązania do wzoru na tensor Riemanna:

$$\begin{aligned} R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\lambda\mu} k_\sigma k_\nu - h_{\mu\sigma} k_\lambda k_\nu - h_{\lambda\nu} k_\sigma k_\mu + h_{\nu\sigma} k_\lambda k_\mu), \\ R_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \eta_{\kappa\sigma} (h^{\lambda\mu} k^\sigma k^\nu - h^{\mu\sigma} k^\lambda k^\nu - h^{\lambda\nu} k^\sigma k^\mu + h^{\nu\sigma} k^\lambda k^\mu). \end{aligned}$$

Zauważamy, że w skalarze Kretschmanna (**Wzory użyteczne 7**) wszystkie możliwe iloczyny drugich pochodnych zaburzeń sprowadzają się do wyrażeń typu:

$$k_\sigma h^{\sigma\mu} \mapsto k_i H^{ij} \text{ oraz } k_\mu k^\mu$$

i oba z nich znikają na mocy rozwiązania równań Einsteina, toteż

$$K = 0.$$

Rozdział 6

Konforemne uzwarcenie czasoprzestrzeni algebraicznie specjalnej

Zadania

Zadanie 6.1. Znaleźć czynnik konforemny dla metryki g_{AS} (**Wzory użyteczne 21**), w taki sposób, by nowa (niefizyczna) metryka spełniała wszystkie warunki asymptotycznej płaskości w zerowej nieskończoności (*null infinity*) wg Penrosa. Znaleźć czas retardowany \tilde{u} na skraju \mathcal{I}^+ .

Rozwiązania

Rozwiązanie 6.1. Poszukujemy czynnika konforemnego Ω dla metryki algebraicznie specjalnej (**Wzory użyteczne 21**), takiego że

$$\tilde{g} = \Omega^2 g_{AS},$$

przy czym

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \tilde{g} = 2 \frac{d\xi d\bar{\xi}}{1 + \frac{1}{2} \xi \bar{\xi}} = g_{S_2}.$$

Dodatkowo Ω pełni rolę nowej, dobrze określonej współrzędnej na skraju (zastępując niejako r). Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\phi^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \xi \bar{\xi}} \implies g_{S_2} = 2\phi^2 d\xi d\bar{\xi}.$$

Przyjrzyjmy się ostatniemu członowi metryki \tilde{g} zależnemu tylko od współrzędnych zespolonych:

$$2\Omega^2 \frac{r^2 + \Sigma^2}{P^2} d\xi d\bar{\xi} = 2 \left(\frac{\Omega r^2}{P^2} + \frac{\Omega^2 \Sigma^2}{P^2} \right) d\xi d\bar{\xi}.$$

Funkcje P i Σ nie zależą od r , toteż na skraju (\mathcal{I}^+) tylko człon r^2 "wybucha", czyli czynnik Ω^2 musi go "zbijać" do metryki na sferze, toteż

$$\frac{\Omega^2 r^2}{P^2} = \phi^2 \implies \Omega^2 = \frac{\phi^2 P^2}{r^2},$$

Korzystając z powyższego wzoru trzeba wyrugować r za pomocą Ω i zapisać metrykę \tilde{g} w nowych zmiennych $(u, \Omega, \xi, \bar{\xi})$. Pamiętając, że $P = P(u, \xi, \bar{\xi})$ oraz $\phi = \phi(\xi, \bar{\xi})$ przechodzimy do obliczeń:

$$dr = d \left(\frac{\phi P}{\Omega} \right) = \frac{1}{\Omega} (\phi_{,\xi} P + \phi P_{,\xi}) d\xi + \frac{1}{\Omega} (\phi_{,\bar{\xi}} P + \phi P_{,\bar{\xi}}) d\bar{\xi} - \frac{\phi P}{\Omega^2} d\Omega.$$

Znając czynnik konforemny obliczamy metrykę na skraju:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \chi \left(\Omega^2 H \chi + 2\Omega^2 dr + \Omega^2 W d\xi + \Omega \bar{W} d\bar{\xi} \right) - 2 \left(\phi^2 + \frac{\Omega^2 \Sigma^2}{P^2} \right) d\xi d\bar{\xi}, \\ \tilde{g}|_{\Omega \rightarrow 0} &= -2\phi P \chi d\Omega - 2\phi^2 d\xi d\bar{\xi} = -2\phi P dud\Omega - 2\phi P d\Omega (L d\xi d\Omega + \bar{L} d\bar{\xi}) - 2\phi^2 d\xi d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Chcąc wprowadzić "dobry" czas retardowany \tilde{u} na skraju musimy przekształcić wyrażenie zawierający poprzedni czas u w następujący sposób

$$2\phi P dud\Omega = 2d\tilde{u}d\Omega \implies 2\phi P du = d\tilde{u},$$

co oznacza, że

$$\tilde{u} = \int \phi P du = \phi(\xi, \bar{\xi}) \int P(u, \xi, \bar{\xi}) du.$$